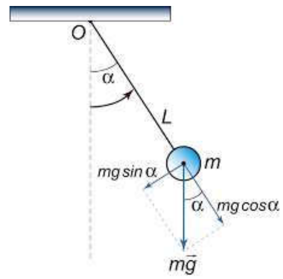
Osnove matematičkog modeliranja - Klatno



Slika 1.

Problem:

Posmatrajmo problem klatna. Loptasti teg mase m vezan je nerastegljivim kanapom (znamarljive mase) dužine l za jednu nepokretnu tačku. Ako se klatno u početnom trenutku otkloni od ravnotežnog položaja za ugao θ_0 i pusti da se slobodno kreće pod uticajem teže, napisati matematički model kojim se opisuje kretanje tega u zavisnosti od vremena t (odrediti funkciju $\theta(t)$ kojom se određuje ugao tega u zavisnosti od vremena t).

Rešenje:

Kretanje tega se može opisati na sledeći način:

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_o}$$

Gde je sa $\overrightarrow{F_g}$ označena sila gravitacije a sa $\overrightarrow{F_o}$ otpora.

Pretpostavimo da se nalazimo u vakuumu i da na teg deluje **samo** sila gravitacije, tj. neka je $\overrightarrow{F_0} = 0$.

Sila gravitacije deluje vertikalno na dole, $F_g = mg$ i može se razložiti na svoje dve komponente:

- radijalnu (F_r) i
- tangencijalnu silu (F_t).

Radijalna komponenta deluje u pravcu kanapa i ne proizvodi ni jedno dejstvo (pretpostavljamo da je kanap nerastegljiv).

Jedino dejstvo ima tangencijalna komponenta kojom se teg pomera u pravcu suprotnom od pravca otklona:

$$F_t = -mg\ sin\theta$$

Sa obzirom da se sila gravitacije koja deluje na teg određuje kao prozvod mase i ubrzanja, a ubrzanje kao drugi izvod pređenog puta, sledi da je

$$m\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -mg \cdot \sin\theta$$

Budući da je masa pozitivna veličina, možemo da podelimo izraz sa m:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -g\sin\theta$$

Ako posmatramo uglove u radijanima, dužina luka je direktno proporcionalna uglu otklona,

$$s(t) = l \cdot \theta(t)$$

pa je

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad (1)$$

Poslednja jednačina predstavlja jednačinu kretanja tega bez prigušenja (zanemarujemo otpor okolne sredine).

Za dobijanje rešenja, potrebno je da unesemo početne uslove:

U trenutku $t = 0$ ugao otklona je θ_0, početna brzina je $v_0 = 0$ (teg je bio u stanju mirovanja):

$$\theta(0) = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}(0) = 0. \quad (2)$$

Jednačine (1) i (2) predstavljaju Košijev zadatak.

U slučaju da je ugao otklona $\theta \ll 1$ model se može dodatno uprostiti ($\sin\theta \approx \theta$):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l}\theta. \quad (3)$$

U literaturi se koristi izraz

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -w^2\theta, \;\; w = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

i kaže da je učestalost oscilovanja w.
Tačno rešenje jednačine (3) je

$$\theta(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t$$

Zamenom početnih uslova u jednačinu, dobija se da je $C_1 = \theta_0, C_2 = 0$ pa je rešenje Košijevog zadatka funkcija

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)t$$

koja opisuje periodično harmonijsko kretanje. Period oscilovanja T_0 je stoga

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \theta_0 \ll 1 \;\; (\theta_0 \ll 15^0)$$

Što je poznato kao Hejgensov zakon. Period ne zavisi od mase m a ni od malog ugla θ_0.

Merenjem perioda T u funkciji dužine l matematičkog klatna se dobijaju eksperimentalni podaci u skladu sa funkcionalnom zavisnošću

$$T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)\sqrt{l}$$

po kojoj je period linearna funkcija $T = k\sqrt{l}$, sa nagibom $k = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$.

Kako se određuje ubrzanje Zemljine teže: na osnovu izmerenih parova $\{(l_1, T_1), (l_2, T_2), \dots, (l_n, T_n)\}$ nacrta grafik $T = f\left(\sqrt{l}\right)$ koja najbolje aproksimira predstavljane eksperimentalne podatke pa se iz nagba te prave k određuje ubrzanje g po formuli

$$g = \frac{4\pi^2}{k^2}.$$

Primer:
Odrediti ubrzanje Zemljine teže ako period oscilovanja kugice koja visi na kanapu dužine 30 cm iznosi 1s.
Rešenje:
$T = 1s$
$l = 0.3m$
$k = \frac{T}{\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{0.3}} = 1.8257418584.. \;\; \rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{k^2} \approx 11.84\frac{m}{s^2}.$

Primer:
Odrediti period oscilovanja kuglice koja visi na kanapu dužine 30 cm ako je $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.
Rešenje:
Period oscilovanja kuglice je $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{9.81}} = 1.0987679729s$

Kako bi izgledala trajektorija klatna ukoliko bi postojao **postoji otpor** vazduha koji usporava klatno pri kretanju:

$$F_o = -B\,\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Označimo B/l sa b. Model klatna sa prigušenjem je sledećeg oblika.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\frac{b}{m}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{g}{l}\sin\theta$$
$$= -k\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{g}{l}\sin\theta \quad \left(k = \frac{b}{ml}\right).$$

Simulacija kretanja klatna u MATLABU

```
clc;
clear all;
m = 0.3;  % masa tega
b = 0.2;  % precnik tega
l = 0.5;  % duzina kanapa
g = 9.81; % gravitacija

r = g/l;
k = b/(m*l);


figure(1);
f = @(t,x) [x(2); -k*x(2)-r*sin(x(1))];    % sa prigusenjem f = [∂θ/∂t ;  -b/(ml) ∂θ/∂t - g/l sin θ]
%f = @(t,x) [x(2); -r*sin(x(1))];          % bez prigusenja

init = [pi/2; 0];                          % pocetni polozaj  (init = [theta_0 v_0])
[t,x] = ode45(f,[0 200], init);

O = [0 0];
axis(gca, 'equal');
axis([-1 1 -1 1]);
grid on;

for i = 1: length(t)
   P = l*[sin(x(i,1))  -cos(x(i,1))];
   O_circ = viscircles(O,0.01);
   pend = line([O(1) P(1)], [O(2) P(2)]);
   ball = viscircles(P, 0.05);

   pause(0.001);

   if i< length(t)
       delete(pend);
       delete(ball);
       delete(O_circ);
   end
end
```

Model klatna se može izvesti i korišćenjem zakona fizike.
U početnom trenutku $t = 0$ klatno je zahvatalo ugao $\theta = \theta_0$ i bilo je u stanju mirovanja. Promena potencijalne energije od početnog do trentuka t je

$$P = mgh$$

dok je promena kinetičke energije

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Zbog zakona očuvanja energije sledi da je

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

tj. $v = \sqrt{2gh}$.
Brzina predstavlja prvi izvod pređenog puta, $v = \frac{\partial s}{\partial t} = l\frac{\partial \theta}{\partial t}$ odakle se dalje dobija da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}$$

Pošto je $h = y_1 - y_0 = lcos\,\theta - lcos\theta_0$ dobija se da je

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad (4)$$

što diferenciranjem po vremenu daje

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2g}{l}\right) sin\theta\right)}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2g}{l}\right) sin\theta\right)}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$= -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Što se poklapa sa prethodnim zapisom matematičkog modela klatna.

Odredimo period za koji će se klatno vratiti u prvobitni položaj (period T):
Posmatrajmo vreme u funkciji od ugla, tj.

$$\frac{\partial t}{\partial \theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Ako integralimo poslednju jednačinu po θ od θ_0 do 0 dobićemo da je

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta}\frac{\partial \theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Rešavanjem ovog integrala (korišćenjem Ležandrove funkcije prve vrste) dobija se da je

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}F\left(\sin\frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad F(k, \psi) = \int_0^{\psi}\frac{\partial u}{\sqrt{1 - k^2\sin u}} \quad \left(\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}\right)$$