

Koristeći DFT odrediti proizvod polinoma: $1+x$ i $2+3x+x^2$.

$$\begin{array}{ccc} P_1(x) = 1+x & , & P_2(x) = 2+3x+x^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ f = [1, 1] & & g = [2, 3, 1] \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \\ \downarrow \\ c = [c_0, c_1, c_2, c_3] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Označimo njihove} \\ \text{koeficijente vektora} \\ f, g \text{ i c. Zapis je oblika:} \\ [\text{slobodan član, koef. uz } x, \dots \\ \dots, \text{ koef. uz } x^k] \end{array}$$

Proizvod ova dva polinoma je polinom stepena 3.

* Treba f i g da dopunimo nulama (na kraj) do dužine vektora c
 $f = [1, 1, 0, 0]$, $g = [2, 3, 1, 0]$, $c = [c_0, c_1, c_2, c_3]$ - svi iste dužine

* Računamo DFT od vektora f (u oznaci $\hat{f}$):

$$W = e^{i\frac{2\pi}{n}}, n=4 \Rightarrow W = i, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -i \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\hat{f} = \frac{1}{n} \cdot F_n \cdot f = \frac{1}{4} \cdot F_4 \cdot f = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1+i), 0, \frac{1}{4}(1-i) \right]^T \rightarrow \text{ovo je DFT od } f$$

Ako posmatramo k -tu koordinatu ovog vektora:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^n \underbrace{W^{jk}}_{k\text{-ta vrsta iz } F} f_j \quad ; \quad \text{pošto je } P_1(x) = \sum_{j=0}^n x^j \cdot f_j \Rightarrow \hat{f}_k = \frac{1}{n} P_1(W^k) \quad (*)$$

* Računamo DFT od vektora g (u oznaci $\hat{g}$)

$$\hat{g} = \frac{1}{n} \cdot F_n \cdot g = \frac{1}{4} \cdot F_4 \cdot g = \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{4}(1+3i), 0, \frac{1}{4}(1-3i) \right]^T \rightarrow \text{ovo je DFT od } g$$

Ako posmatramo k -tu koordinatu ovog vektora:

$$\hat{g}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \underbrace{W^{jk}}_{j\text{-ta vrsta iz } F} g_j \quad ; \quad \text{pošto je } P_2(x) = \sum_{j=0}^n x^j \cdot g_j \Rightarrow \hat{g}_k = \frac{1}{n} P_2(W^k) \quad (**)$$

* Ako bi izračunali DFT od vektora c (u oznaci $\hat{c}$):

$$\hat{c} = \frac{1}{n} \cdot F_n \cdot c = \frac{1}{4} \cdot F_4 \cdot c$$

a njegova k -ta koordinata bi se računala:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \underbrace{W^{jk}}_{j\text{-ta vrsta iz } F} c_j \quad ; \quad \text{pošto je } P(x) = \sum_{j=0}^n x^j \cdot c_j \Rightarrow \hat{c}_k = \frac{1}{n} \cdot P(W^k) \quad (***)$$

* U kakvoj su vezi $\hat{f}$ i $\hat{g}$ sa c ?

- Ako bismo vektore $\hat{f}$ i $\hat{g}$ izmnožili koordinatu po koordinatu (oznaka $\cdot$)

$$\begin{aligned} \hat{f} \cdot \hat{g} &= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \frac{1}{4}(1+i) \cdot \frac{1}{4}(1+3i), 0 \cdot 0, \frac{1}{4}(1-i) \cdot \frac{1}{4}(1-3i) \right]^T \\ &= \left[\frac{3}{4}, -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}i, 0, -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}i \right]^T \end{aligned}$$

- Ako posmatramo k -tu koordinatu ovog vektora:

$$\begin{aligned}
 (\hat{f} \cdot \hat{g})_k &= \hat{f}_k \cdot \hat{g}_k \stackrel{(**)(***)}{=} \underbrace{\frac{1}{n} \cdot p_1(\omega^k)}_{\hat{f}_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot p_2(\omega^k)}_{\hat{g}_k} \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{p_1(\omega^k) \cdot p_2(\omega^k)}_{= P(\omega^k)} \\
 &= \frac{1}{n^2} \cdot P(\omega^k) \\
 &\stackrel{(***)}{=} \frac{1}{n} \cdot \hat{C}_k
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (\hat{f} \cdot \hat{g})_k &= \hat{f}_k \cdot \hat{g}_k \end{aligned}} \right\} (C2)$$

Dakle, ovako dobijeni vektor $(\hat{f} \cdot \hat{g})$ se od DFT vektora C (ti. od DFT proizvoda polinoma) razlikuje u osome $\frac{1}{n}$.

* Da bi dobili $\hat{C}$ (DFT proizvoda polinoma) treba $(\hat{f} \cdot \hat{g})$ da pomnožimo sa $n=4$.

* Da bi od $\hat{C}$ dobili C (koeficijente proizvoda) treba da odradimo inverznu Furijevu transformaciju.

* Dakle: $\hat{f} \cdot \hat{g} = \frac{1}{n} \cdot \hat{C} \quad (\heartsuit)$

Posto je $\hat{C} = \frac{1}{n} \cdot F_n \cdot C \Rightarrow \hat{f} \cdot \hat{g} = \frac{1}{n^2} \cdot F_n \cdot C$
 $F_n^* /$

$$\Rightarrow F_n^* (\hat{f} \cdot \hat{g}) = \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{F_n^* \cdot F_n}_{= n \cdot I} \cdot C$$

(tvrdjenje iz teorije)

$$= \frac{1}{n} \cdot C$$

$$\Rightarrow C = n \cdot \underbrace{F_n^* (\hat{f} \cdot \hat{g})}_{\text{ovo je inverzna DFT vektora } \hat{f} \cdot \hat{g}} \rightarrow (\equiv f * g)$$

ovo se naziva konvolucija $(f * g)$

* Da bi dobili F_4^* , treba nam $\bar{\omega} = e^{-i \frac{2\pi}{n}}$, $n=4$, $\bar{\omega} = -i$, $F_4^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$

$$C = n \cdot F_4^* (\hat{f} \cdot \hat{g}) = 4 \cdot F_4^* \cdot \left[\frac{3}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i, 0, -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i \right]^T$$

$$= [2, 5, 4, 1]^T \quad \rightarrow \text{ovo su koeficijenti proizvoda polinoma}$$

$$\Rightarrow c(x) = 2 + 5x + 4x^2 + 1 \cdot x^3 = p_1(x) \cdot p_2(x)$$