16. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 30. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Košijeve ocene za harmonijske funkcije

Podsetimo se da za holomorfne funkcije važi sledeća teorema.

Teorema 1

Neka je $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ *i* $M > 0$. *Tada za svaku funkciju* $f : B(a,r) \to \mathbb{C}$ *koja je holomorfna na* $B(a,r)$ *i ograničena sa* M *na* $B(a,r)$ *važi*

$$|f^{(\alpha)}(a)| \leqslant \frac{n!M}{r^n}.$$

Za harmonijske funkcije važi analogna teorema.

Teorema 2 (Košijeve ocene)

Neka je $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ *i* $M > 0$. *Tada postoji konstanta* $C(\alpha) > 0$ *takva da za svaku funkciju* $u : B(a, r) \to \mathbb{R}$ *koja je harmonijska na* $B(a, r)$ *i ograničena sa* M *na* $B(a, r)$ *važi*

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C(\alpha) M}{r^{|\alpha|}}.$$

Dokaz ćemo dati kroz nekoliko koraka.

I. Pretpostavimo da je $u : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija koja je harmonijska i ograničena sa M na $\overline{\mathbb{B}}$.

Tada je

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(0)| &= \frac{1}{n\omega_n} \left| \int_{\partial\mathbb{B}} D_x^\alpha \left(\mathcal{P}(\cdot, y)\right)(0) u(y) dS(y) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n\omega_n} M \int_{\partial\mathbb{B}} |D_x^\alpha \left(\mathcal{P}(\cdot, y)\right)(0)| dS(y) \\ &= C(\alpha) M, \end{aligned}$$

gde je $C(\alpha) = \dfrac{1}{n\omega_n} \displaystyle\int_{\partial\mathbb{B}} |D_x^\alpha \left(\mathcal{P}(\cdot, y)\right)(0)| dS(y).$

II. Pretpostavimo da je $u : \overline{B}(a, r) \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija koja je harmonijska i ograničena sa M na $\overline{B}(a, r)$.

Neka je $v : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{R}$ definisana sa $v(x) = u(rx + a)$.

Jasno je da je funkcija v harmonijska i ograničena sa M na $\overline{\mathbb{B}}$.

Na osnovu dokazanog u **I** imamo

$$|D^\alpha v(0)| \leqslant C(\alpha)M.$$

Otuda, uzimajući u obzir da je

$$D^\alpha v(0) = r^{|\alpha|} D^\alpha u(a),$$

dobijamo

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C(\alpha)M}{r^{|\alpha|}}.$$

III. Pretpostavimo da je $u : B(a,r) \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija koja je harmonijska i ograničena sa M na $B(a,r)$.

Na osnovu dokazanog u **II** imamo da za svako $0 < \varepsilon < r$ važi

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C(\alpha)M}{(r-\varepsilon)^{|\alpha|}}.$$

Otuda, prelaskom na limes kad $\varepsilon \to 0+$ dobijamo

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant \frac{C(\alpha)M}{r^{|\alpha|}}.$$

Zadatak 1

Neka je $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *harmonijska funkcija takva da za neke* $A, B > 0$ *i svako* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *važi*

$$|u(x, y)| \leqslant A + B(x^2 + y^2).$$

Dokazati da postoje konstante $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ *takve da je*

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

Rešenje. Neka je $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljna tačka i neka je $r > 0$ proizvoljno.

Funkcija u je harmonijska na disku $D = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - z_0| < r\}$ i za svako $z \in D$ važi

$$\begin{aligned} |u(z)| &\leqslant A + B|z|^2 \\ &\leqslant A + B(r + |z_0|)^2. \end{aligned}$$

Na osnovu Košijevih ocena, za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoji konstanta $C(\alpha) > 0$ takva da važi

$$|D^\alpha u(z_0)| \leqslant \frac{C(\alpha)(A + B(r + |z_0|)^2)}{r^{|\alpha|}}.$$

Specijalno, ako je $|\alpha| = 3$ imamo

$$|D^\alpha u(z_0)| \leqslant \frac{C(\alpha)(A + B(r + |z_0|)^2)}{r^3}.$$

Otuda, prelaskom na limes kad $r \to +\infty$ dobijamo $|D^\alpha u(z_0)| = 0$.

Kako je z_0 bilo proizvoljno, dobili smo da su svi parcijalni izvodi trećeg reda funkcije u identički jednaki 0.

Iz

$$u_{xxx} = 0$$

dobijamo

$$u_{xx} = c_1(y),$$

gde je $c_1 \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ proizvoljna funkcija.

Otuda dobijamo

$$u_{xxy} = c_1'(y),$$

a kako je $u_{xxy} = 0$, sledi da je $c_1'(y) = 0$, tj. $c_1(y) = C_1$, za neko $C_1 \in \mathbb{R}$.

Iz

$$u_{xx} = C_1$$

dobijamo

$$u_x = C_1 x + c_2(y),$$

gde je $c_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ proizvoljna funkcija.

Otuda dobijamo

$$u_{xyy} = c_2''(y),$$

a kako je $u_{xyy} = 0$, sledi da je $c_2''(y) = 0$, tj. $c_2(y) = C_2 y + D_2$, za neke $C_2, D_2 \in \mathbb{R}$.

Iz

$$u_x = C_1 x + C_2 y + D_2$$

dobijamo

$$u = C_1 \frac{x^2}{2} + (C_2 y + D_2)x + c_3(y),$$

gde je $c_3 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ proizvoljna funkcija.

Otuda dobijamo

$$u_{yyy} = c_3'''(y),$$

a kako je $u_{yyy} = 0$, sledi da je $c_3'''(y) = 0$, tj. $c_3(y) = C_3 \frac{y^2}{2} + D_3 y + E_3$, za neke $C_3, D_3, E_3 \in \mathbb{R}$.

Dakle, za proizvoljno $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$\begin{aligned} u &= C_1 \frac{x^2}{2} + (C_2 y + D_2)x + C_3 \frac{y^2}{2} + D_3 y + E_3 \\ &= C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 xy + C_3 \frac{y^2}{2} + D_2 x + D_3 y + E_3, \end{aligned}$$

gde su $C_1, C_2, C_3, D_2, D_3, E_3 \in \mathbb{R}$.

Teorema 3 (Harnakove nejednakosti za jediničnu loptu)

Neka je $u : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ *harmonijska i pozitivna funkcija na* $\mathbb{B}$. *Tada za svako* $x \in \mathbb{B}$ *važi*

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}u(0). \tag{1}$$

Dokaz.

I. Pretpostavimo da je $u : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{R}$ harmonijska i pozitivna funkcija na $\overline{\mathbb{B}}$. Tada za svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} u(y) dS(y).$$

Kako za svako $x \in \mathbb{B}$ i svako $y \in \partial\mathbb{B}$ važi

$$|x-y| \geqslant \Big||x|-|y|\Big| = 1-|x|,$$

i

$$|x-y| \leqslant |x|+|y| = |x|+1,$$

dobijamo da za svako $x \in \mathbb{B}$ i svako $y \in \partial\mathbb{B}$ važi

$$\frac{1-|x|^2}{(1+|x|)^n} \leqslant \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} \leqslant \frac{1-|x|^2}{(1-|x|)^n},$$

tj.

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} \leqslant \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} \leqslant \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}.$$

Otuda za $x \in \mathbb{B}$ važi

$$\int\limits_{\partial\mathbb{B}} \frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} u dS \leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{B}} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} u(y) dS(y) \leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{B}} \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} u dS,$$

tj.

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial\mathbb{B}} u(y) dS(y) \leqslant u(x) \leqslant \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial\mathbb{B}} u(y) dS(y).$$

Konačno, kako je $u(0) = \dfrac{1}{n\omega_n} \displaystyle\int\limits_{\partial\mathbb{B}} u(y) dS(y)$ dobijamo (1).

II. Neka je $0 < r < 1$ i neka je funkcija $v : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$v(x) = u(rx).$$

Jasno je da je funkcija v harmonijska i pozitivna na $\overline{\mathbb{B}}$.

Na osnovu **I** za svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} v(0) \leqslant v(x) \leqslant \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} v(0),$$

tj.

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}} u(0) \leqslant u(rx) \leqslant \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} u(0).$$

Otuda uzimajući limes kad $r \to 1-$ dobijamo (1).

Zadatak 2

Neka je $u : \mathbb{D} \to (0, +\infty)$ *harmonijska funkcija takva da je* $u(0) = 1$.

a) *Koja je najveća moguća vrednost za* $u\left(\frac{1}{2}\right)$*?*

b) *Koja je najmanja moguća vrednost za* $u\left(\frac{1}{2}\right)$*?*

Rešenje. Na osnovu Harnakovih nejednakosti dobijamo

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \leqslant u\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}},$$

tj.

$$\frac{1}{3} \leqslant u\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 3.$$

Deo a). Da li postoji harmonijska funkcija $u : \mathbb{D} \to (0, +\infty)$ takva da je $u(0) = 1$ i $u\left(\frac{1}{2}\right) = 3$?

Neka je $A(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

Može se pokazati da A preslikava $\mathbb{D}$ na $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$.

Takođe, A je holomorfna funkcija na $\mathbb{D}$.

Neka je $u = \operatorname{Re} A$. Funkcija u preslikava $\mathbb{D}$ u $(0, +\infty)$, harmonijska je na $\mathbb{D}$ i važi $u(0) = 1$ i $u\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

Deo b) uraditi za domaći zadatak.

V TOPLOTNA JEDNAČINA

Parcijalna jednačina

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{2}$$

gde je $a > 0$ fiksirana konstanta i $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ nepoznata funkcija promenljivih (x, t) naziva se *toplotna jednačina* (eng. heat equation).

Pri tome se nezavisna promenljiva x interpretira kao tačka na pravoj, a nezavisna promenljiva t kao vreme koje merimo od početnog trenutka $t = 0$.

Početni problem za toplotnu jednačinu

Razmotrimo početni problem za toplotnu jednačinu.

Neka je $a > 0$ fiksirana konstanta i neka je $g \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ data funkcija. *Početni problem za toplotnu jednačinu* odnosi se na određivanje funkcije $u : \mathbb{R} \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ takve da je

1° $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,+\infty);\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}\times[0,+\infty);\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}\times[0,+\infty);\mathbb{R})$*;

2° $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$, za svako $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$;

3° $u(x,0) = g(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

U nastavku rešavamo ovaj problem.

*Sa $C^{2,1}$ obeležavamo klasu funkcija koje su dvaput neprekidno-diferencijabilne po prvoj promenljivoj (u ovom slučaju to je promenljiva x) i jedanput neprekidno-diferencijabilne po drugoj promenljivoj (u ovom slučaju to je promenljiva t).

Princip maksimuma i minimuma za rešenje toplotne jednačine

Neka je $I \subset \mathbb{R}$ ograničen otvoreni interval i $T > 0$.

Dalje, neka je

$$\begin{aligned} D_T &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, t \in (0,T]\}, \\ \Gamma_T &= \overline{D_T} \setminus D_T, \\ H_T &= \partial D_T \setminus \Gamma_T. \end{aligned}$$

Teorema 4

Neka je $a > 0$ *i neka je funkcija* $u : \overline{D_T} \to \mathbb{R}$ *takva da*

1° $u \in C^{2,1}(D_T; \mathbb{R}) \cap C(\overline{D_T}; \mathbb{R})$;

2° $u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) \leqslant 0$, *za svako* $(x,t) \in D_T$.

Tada je

$$\max_{\Gamma_T} u = \max_{\overline{D_T}} u.$$

Kako bismo dokazali ovu teoremu najpre ćemo formulisati i dokazati jednu lemu.

Lema 1

Neka je $a > 0$ *i neka je funkcija* $u : \overline{D_T} \to \mathbb{R}$ *takva da* $u \in C^{2,1}(D_T; \mathbb{R}) \cap C(\overline{D_T}; \mathbb{R})$. *Ako funkcija* u *svoj maksimum na* $\overline{D_T}$ *dostiže* u *nekoj tački* $(x_0, t_0) \in D_T$ *onda je*

$$u_t(x_0, t_0) \geqslant 0$$

i

$$u_{xx}(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

Specijalno,

$$u_t(x_0, t_0) - a^2 u_{xx}(x_0, t_0) \geqslant 0.$$

Dokaz leme. Kako je $(x_0, t_0) \in D_T$, sledi da je $t_0 > 0$.

Dalje, za dovoljno malo $h > 0$ imamo da $(x_0, t_0 - h) \in D_T$, a kako je (x_0, t_0) tačka maksimuma funkcije u, sledi da je i

$$u(x_0, t_0) - u(x_0, t_0 - h) \geqslant 0.$$

Stoga je

$$u_t(x_0, t_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{u(x_0, t_0 - h) - u(x_0, t_0)}{-h} \geqslant 0.$$

Za dokaz druge nejednakosti definišimo funkciju $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sa $\varphi(x) = u(x, t_0)$. Funkcija φ dostiže lokalni maksimum u tački x_0, pa je $\varphi'(x_0) = 0$ i $\varphi''(x_0) = u_{xx}(x_0, t_0) \leqslant 0$ (ako bi bilo $\varphi''(x_0) > 0$, onda bi funkcija φ u tački x_0 dostizala strogi lokalni minimum).

Dokaz teoreme. Pre svega primetimo da su Γ_T i $\overline{D_T}$ kompaktni skupovi i funkcija u neprekidna na $\overline{D_T}$, pa navedeni maksimumi postoje.

Kako je $\Gamma_T \subset \overline{D_T}$ dovoljno je da dokažemo da je $\max\limits_{\overline{D_T}} u \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} u$.

I. Pretpostavimo dodatno da za svako $(x,t) \in D_T$ važi

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) < 0.$$

Tada na osnovu prethodne leme sledi da funkcija u svoj maksimum na $\overline{D_T}$ dostiže u nekoj tački iz Γ_T.

II. Oslobodimo se dodatne pretpostavke navedene u **I.**

Neka je $\varepsilon > 0$ i funkcija $v : \overline{D_T} \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t.$$

Važi $v_t = u_t - \varepsilon$ i $v_{xx} = u_{xx}$. Otuda je

$$v_t - a^2 v_{xx} = u_t - \varepsilon - a^2 u_{xx} \leqslant -\varepsilon < 0.$$

Dakle, na osnovu dokazanog pod **I** dobijamo

$$\max_{\overline{D_T}} v = \max_{\Gamma_T} v. \tag{3}$$

Kako za svako $(x,t) \in \overline{D_T}$ važi $v(x,t) \leqslant u(x,t)$, sledi da je

$$\max_{\Gamma_T} v \leqslant \max_{\Gamma_T} u. \tag{4}$$

Na osnovu (3) i (4) imamo

$$\max_{\overline{D_T}} v \leqslant \max_{\Gamma_T} u. \tag{5}$$

S druge strane, na osnovu definicije funkcije v, za svako $(x,t) \in \overline{D_T}$ važi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x,t) + \varepsilon t \\ &\leqslant v(x,t) + \varepsilon T. \end{aligned}$$

Otuda je

$$\max_{\overline{D_T}} u \leqslant \max_{\overline{D_T}} v + \varepsilon T. \tag{6}$$

Dalje, iz (5) i (6), sledi

$$\max_{\overline{D_T}} u \leqslant \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T. \tag{7}$$

Konačno, uzimajući da $\varepsilon \to 0+$, iz (7) dobijamo $\max\limits_{\overline{D_T}} u \leqslant \max\limits_{\Gamma_T} u.$

Teorema 5

Neka je $a > 0$ *i neka je funkcija* $u : \overline{D_T} \to \mathbb{R}$ *takva da*

1° $u \in C^{2,1}(D_T; \mathbb{R}) \cap C(\overline{D_T}; \mathbb{R})$;

2° $u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) \geqslant 0$, *za svako* $(x,t) \in D_T$.

Tada je

$$\min_{\Gamma_T} u = \min_{\overline{D_T}} u.$$

Dokaz teoreme. Potrebno je primeniti teoremu 4 na funkciju $-u$.

Teorema 6 (Princip maksimuma i minimuma za rešenje toplotne jednačine)

Neka je $a > 0$ *i neka je funkcija* $u : \overline{D_T} \to \mathbb{R}$ *takva da*

1° $u \in C^{2,1}(D_T; \mathbb{R}) \cap C(\overline{D_T}; \mathbb{R})$;

2° $u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0$, *za svako* $(x,t) \in D_T$.

Tada je

$$\max_{\Gamma_T} u = \max_{\overline{D_T}} u$$

i

$$\min_{\Gamma_T} u = \min_{\overline{D_T}} u.$$

Dokaz teoreme. Dokaz sledi direktno na osnovu teorema 4 i 5.