

15. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 28. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na poluravni

Neka je $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ i neka je $f : \partial H \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x, y) = 0$.

Posmatrajmo Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na H :

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & (x, y) &\in H, \\ u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) &\in \partial H.\end{aligned}$$

Da li ovaj problem ima rešenje u $C(\overline{H}; \mathbb{R}) \cap C^2(H; \mathbb{R})$?

Na primer, funkcija $u_1 : \overline{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u_1(x, y) = 0$ jeste rešenje tog problema.

Da li je to rešenje jedinstveno?

Primetimo da su i funkcije $u_2, u_3, u_4 : \overline{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $u_2(x, y) = y$, $u_3(x, y) = xy$ i $u_4(x, y) = e^x \sin y$ rešenja tog problema.

Primetimo i da je funkcija u_1 ograničena, a funkcije u_2 , u_3 i u_4 nisu ograničene.

Da li je funkcija u_1 jedino ograničeno rešenje datog problema?

Podsetimo se Liuvilove teoreme za holomorfne funkcije.

Teorema 1

Neka je $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ako je $|f|$ ograničena funkcija onda je f konstantna funkcija.

Za harmonijske funkcije važi analogna teorema.

Teorema 2 (Liuvilova teorema)

Neka je $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija. Ako je u ograničena funkcija odozgo ili odozdo onda je u konstantna funkcija.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je u pozitivna funkcija.

Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ fiksirano i neka je $r > |x|$.

Sa E_r obeležimo simetričnu razliku lopti $B(x, r)$ i $B(0, r)$. Dakle,

$$\begin{aligned} E_r &= \left(B(x, r) \setminus B(0, r) \right) \cup \left(B(0, r) \setminus B(x, r) \right) \\ &= \left(B(x, r) \cup B(0, r) \right) \setminus \left(B(x, r) \cap B(0, r) \right). \end{aligned}$$

Na osnovu zapreminske verzije svojstva srednje vrednosti važi

$$\begin{aligned}
 u(x) - u(0) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(x,r)} u(y) dy - \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(0,r)} u(y) dy \\
 &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\int_{\overline{B}(x,r)} u(y) dy - \int_{\overline{B}(0,r)} u(y) dy \right) \\
 &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\int_{\overline{B}(x,r) \setminus B(0,r)} u(y) dy + \int_{\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(0,r)} u(y) dy \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\overline{B}(0,r) \setminus B(x,r)} u(y) dy - \int_{\overline{B}(0,r) \cap \overline{B}(x,r)} u(y) dy \right).
 \end{aligned}$$

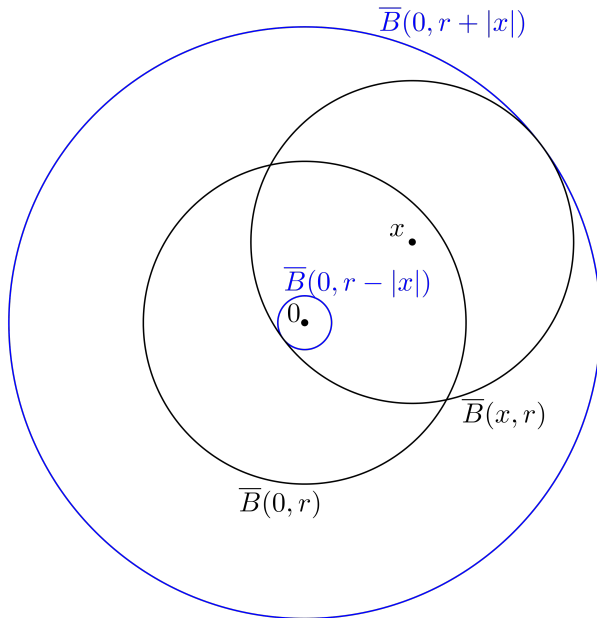
Dakle,

$$u(x) - u(0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\int_{\overline{B}(x,r) \setminus B(0,r)} u(y) dy - \int_{\overline{B}(0,r) \setminus B(x,r)} u(y) dy \right).$$

Otuda kako je funkcija u pozitivna dobijamo

$$(1) \quad |u(x) - u(0)| \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{E_r}} u(y) dy.$$

Primetimo da važi $\overline{E_r} \subseteq \overline{B}(0, r + |x|) \setminus B(0, r - |x|)$.



Kako je funkcija u pozitivna dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{E_r}} u(y) dy &\leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(0, r+|x|) \setminus B(0, r-|x|)} u(y) dy \\ (2) \qquad &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\int_{\overline{B}(0, r+|x|)} u(y) dy - \int_{\overline{B}(0, r-|x|)} u(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\omega_n (r+|x|)^n u(0) - \omega_n (r-|x|)^n u(0) \right) \\ &= u(0) \frac{(r+|x|)^n - (r-|x|)^n}{r^n}. \end{aligned}$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$(3) \quad |u(x) - u(0)| \leq u(0) \frac{(r + |x|)^n - (r - |x|)^n}{r^n}.$$

Prelaskom na limes kad $r \rightarrow +\infty$ iz (3) dobijamo

$$|u(x) - u(0)| = 0.$$

Dakle, $u(x) = u(0)$.

Konačno, kako je x proizvoljna tačka iz $\mathbb{R}^n$ imamo da je funkcija u jednaka $u(0)$ na $\mathbb{R}^n$.

Na osnovu naredne teoreme dobijamo da je odgovor na postavljeno pitanje pozitivan.

Teorema 3

Neka je $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ i neka je $f : \partial H \rightarrow \mathbb{R}$ data neprekidna i ograničena funkcija. Tada postoji najviše jedna funkcija $u : \overline{H} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da

- $u \in C^2(H; \mathbb{R}) \cap C(\overline{H}; \mathbb{R});$
- $\Delta u = 0, \quad (x, y) \in H;$
- $u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial H;$
- u je ograničena na $\overline{H}$.

Dokaz.

Pretpostavimo da funkcije u_1 i u_2 zadovoljavaju date uslove.

Pokažimo da je $u_1 = u_2$. U tom cilju, neka je $U = u_1 - u_2$. Tada za funkciju U važi

- $U \in C^2(H; \mathbb{R}) \cap C(\overline{H}; \mathbb{R})$;
- $\Delta U = 0, \quad (x, y) \in H$;
- $U(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial H$;
- U je ograničena na $\overline{H}$.

Domen funkcije U nije $\mathbb{R}^2$, pa ne možemo primeniti Liuvilovu teoremu.

Međutim, možemo harmonijski proširiti funkciju U na $\mathbb{R}^2$.

Neka je $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$V(x, y) = \begin{cases} U(x, y), & (x, y) \in \overline{H}, \\ -U(x, -y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}. \end{cases}$$

Dokažimo da je funkcija V harmonijska na $\mathbb{R}^2$.

Neka je $(x, y) \in H$. Tada je

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y) = 0.$$

Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}$. Tada je

$$\begin{aligned} V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) &= -U_{xx}(x, -y) - U_{yy}(x, -y) \\ &= -(U_{xx}(x, -y) + U_{yy}(x, -y)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$. Kako dokazati da je

$$V_{xx}(x, 0) + V_{yy}(x, 0) = 0?$$

Dokažimo da je funkcija V neprekidna na $\mathbb{R}^2$, kao i da ima svojstvo srednje vrednosti na $\mathbb{R}^2$.

Neprekidnost dokazati za domaći zadatak.

Dokažimo sada da za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ postoji pozitivan niz $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ takav da je $\lim_{j \rightarrow +\infty} r_j = 0$ i

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(x + r_j \cos t, y + r_j \sin t) dt.$$

Neka je $(x, y) \in H$ (odnosno $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}$). Tada odgovarajući niz $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ postoji jer je funkcija V harmonijska na H (odnosno na $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{H}$).

Neka je $x \in \mathbb{R}$ i neka je $r > 0$ proizvoljno. Tada je

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} V(x + r \cos t, r \sin t) dt \\ = & \int_0^{\pi} V(x + r \cos t, r \sin t) dt + \int_{-\pi}^0 V(x + r \cos t, r \sin t) dt \\ = & \int_0^{\pi} U(x + r \cos t, r \sin t) dt - \int_{-\pi}^0 U(x + r \cos t, -r \sin t) dt \\ = & \int_0^{\pi} U(x + r \cos t, r \sin t) dt + \int_{\pi}^0 U(x + r \cos \tau, r \sin \tau) d\tau \\ = & 0 = V(x, 0). \end{aligned}$$

Dakle, funkcija V je harmonijska na $\mathbb{R}^2$.

Kako je funkcija U ograničena na $\overline{H}$, na osnovu definicije funkcije V sledi da je i funkcija V ograničena na $\mathbb{R}^2$.

Otuda, na osnovu Liuvilove teoreme sledi da je funkcija V konstantna.

Konačno, kako je $V(0,0) = 0$, sledi da je $V(x,y) = 0$ za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a samim tim $U(x,y) = 0$ za svako $(x,y) \in \overline{H}$.

Zadatak 1

Neka je $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada $C(\overline{H}; \mathbb{R}) \cap C^2(H; \mathbb{R})$ i dokazati da je jedinstveno):

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in H,$$

$$u(x, 0) = \frac{(x^2 - 1)^2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

u je ograničena na H .

Jedinstvenost sledi na osnovu prethodne teoreme.

Ideja je da dati Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na poluravni H svedemo na Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na disku $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Podsetimo se da je preslikavanje $A : \mathbb{D} \rightarrow H$ definisano sa

$A(z) = i \frac{1+z}{1-z}$ holomorfno preslikavanje na $\mathbb{D}$, koje je uz to „1-1” i „NA”.

Otuda je i preslikavanje $A^{-1} : H \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfno preslikavanje na H .

Neka je $v = u \circ A$.

Tada za svako $(x, y) \in H$ važi $\Delta u(x, y) = 0$ ako i samo ako za svako $(\xi, \eta) \in \mathbb{D}$ važi $\Delta v(\xi, \eta) = 0$.

Transformisali smo jednačinu, a treba da transformišemo i granični uslov.

U tom cilju, neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

Dalje, neka je $g = f \circ A$.

Da li g preslikava $\partial\mathbb{D}$ u $\mathbb{R}$?

Primetimo da $(1, 0) \in \partial\mathbb{D}$ i da $A(1, 0)$ nije definisano.

To je potencijalni problem.

Međutim, primetimo da se svaka tačka koja pripada $\partial\mathbb{D} \setminus \{(1, 0)\}$ može da se predstavi u obliku e^{it} , pri čemu je $t \in (0, 2\pi)$.

Dalje, za svako $t \in (0, 2\pi)$ važi

$$\begin{aligned} A(e^{it}) &= i \frac{1 + e^{it}}{1 - e^{it}} = i \frac{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} \\ &= i \frac{2 \cos \frac{t}{2}}{-2i \sin \frac{t}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Otuda, za svako $t \in (0, 2\pi)$ važi

$$g(e^{it}) = (f \circ A)(e^{it}) = f\left(-\operatorname{ctg} \frac{t}{2}\right) = \dots = \cos 2t.$$

Primetimo da je izraz $\cos 2t$ definisan i za $t = 0$ i za $t = 2\pi$, kao i da važi $\cos(2 \cdot 0) = \cos(2 \cdot 2\pi)$.

Drugim rečima, funkcija $(f \circ A)$ može se dodefinisati u tački $(1, 0)$ tako da pripada $C(\partial\mathbb{D}; \mathbb{R})$.

Primetimo da za svako $t \in [0, 2\pi]$ važi

$$g(e^{it}) = g(\cos t, \sin t) = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Dakle, dati problem svodi se sledeći Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na $\mathbb{D}$:

$$\Delta v(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{D},$$

$$v(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2, \quad (\xi, \eta) \in \partial\mathbb{D}.$$

Rešenje poslednjeg problema jeste funkcija $v : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $v(\xi, \eta) = \xi^2 - \eta^2$.

Otuda, za svako $(x, y) \in \overline{H}$ važi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (v \circ A^{-1})(x, y) \\ &= v\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2}, -\frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2}\right)^2 - \left(-\frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Neposredno se proverava da

- $u \in C(\overline{H}; \mathbb{R}) \cap C^2(H; \mathbb{R})$;
- $\Delta u(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in H$;
- $u(x, 0) = \frac{(x^2 - 1)^2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$, za svako $x \in \mathbb{R}$;
- u je ograničena na $\overline{H}$.

Zadatak 2

Odrediti sve harmonijske funkcije $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je u_x ograničena funkcija.

Primetimo da je i funkcija u_x harmonijska.

Zaista, za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$(u_x)_{xx}(x, y) + (u_x)_{yy}(x, y) = (u_{xx} + u_{yy})_x(x, y) = 0.$$

Otuda, na osnovu Liuvilove teoreme postoji $C \in \mathbb{R}$ takvo da za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$u_x(x, y) = C.$$

Dakle, za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$u(x, y) = \int u_x(x, y) dx = Cx + D(y),$$

pri čemu je $D \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Neka je $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljno. Iz $u(x, y) = Cx + D(y)$ dobijamo $u_{xx}(x, y) = 0$ i $u_{yy}(x, y) = D''(y)$.

Otuda, uzimajući u obzir da je u harmonijska funkcija dobijamo

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = D''(y) = 0,$$

pa je $D(y) = Ey + F$, pri čemu su $E, F \in \mathbb{R}$.

Dakle, ako je $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na $\mathbb{R}^2$ takva da je u_x ograničena funkcija, onda je $u(x, y) = Cx + Ey + F$, pri čemu su $C, E, F \in \mathbb{R}$.

S druge strane, ako je $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u(x, y) = Cx + Ey + F$, pri čemu su $C, E, F \in \mathbb{R}$, onda je u harmonijska funkcija na $\mathbb{R}^2$ takva da je u_x ograničena funkcija.

Puasonovo jezgro za poluravan i egzistencija rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na poluravni

Razmotrimo sada egzistenciju rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na poluravni.

Neka je $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ i neka je $g : \partial\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ data neprekidna i ograničena funkcija. *Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na poluravni* $\mathbb{H}$ odnosi se na određivanje funkcije $u : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

- 1° $u \in C(\overline{\mathbb{H}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x, y) = 0$ za svako $(x, y) \in \mathbb{H}$;
- 3° $u(x, y) = g(x, y)$ za svako $(x, y) \in \partial\mathbb{H}$;
- 4° u je ograničena na $\overline{\mathbb{H}}$.

Pretpostavimo dodatno da $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, 0)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, 0)$ postoje i jednaki su konačnom broju M .

Neka je preslikavanje A definisano sa $A(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.

Može se pokazati da važi sledeće:

- A bijektivno preslikava $\mathbb{D}$ na $\mathbb{H}$;
- A i A^{-1} su holomorfna preslikavanja na $\mathbb{D}$, odnosno $\mathbb{H}$.

Primetimo da za $t \in (0, 2\pi)$ važi

$$\begin{aligned} A(e^{it}) &= i \frac{1 + e^{it}}{1 - e^{it}} = i \frac{e^{it/2}(e^{-it/2} + e^{it/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} \\ &= i \frac{2 \cos(t/2)}{-2i \sin(t/2)} = -\operatorname{ctg} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, A preslikava $\partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ na $\partial\mathbb{H}$.

Osim toga,

A bijektivno preslikava $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ na $\overline{\mathbb{H}}$;

A i A^{-1} su neprekidna preslikavanja na $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, odnosno $\overline{\mathbb{H}}$.

Dalje, neka je funkcija $G : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$G(e^{it}) = \begin{cases} (g \circ A)(e^{it}), & \text{ako je } t \in (0, 2\pi), \\ M, & \text{ako je } t \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Neposredno se pokazuje da je funkcija G neprekidna na $\partial\mathbb{D}$.

Neka je $U : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ jedinstveno rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na disku $\mathbb{D}$, sa graničnim uslovom G . Preciznije, neka je funkcija $U : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

- 1° $U \in C(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{D}; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta U(z) = 0$ za svako $z \in \mathbb{D}$;
- 3° $U(z) = G(z)$ za svako $z \in \partial\mathbb{D}$.

Funkcija $u : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u(z) = (U \circ A^{-1})(z)$ jeste rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na $\mathbb{H}$, sa graničnim uslovom g .

Da li se možemo osloboditi dodatne pretpostavke da $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, 0)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, 0)$ postoje i jednaki su?

Imamo da za svako $\zeta \in \mathbb{D}$ važi

$$U(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\zeta, e^{it}) G(e^{it}) dt$$

Ako u poslednjem integralu uradimo smenu $\tau = -\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ dobijamo

$$U(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}\left(\zeta, \frac{\tau - i}{\tau + i}\right) \frac{g(\tau, 0)}{\tau^2 + 1} d\tau.$$

Otuda, ako je $z = (x, y) \in \mathbb{H}$ i $\zeta = A^{-1}(z)$ dobijamo

$$\begin{aligned}u(z) &= (U \circ A^{-1})(z) \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P} \left(A^{-1}(z), \frac{\tau - i}{\tau + i} \right) \frac{g(\tau, 0)}{\tau^2 + 1} d\tau. \\&= \dots \\&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x - \tau)^2 + y^2} g(\tau, 0) d\tau.\end{aligned}$$

Funkcija $\mathcal{P} : \mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\mathcal{P}(z, \tau) = \mathcal{P}((x, y), \tau) = \frac{y}{(x - \tau)^2 + y^2}$$

naziva se *Puasonovo jezgro za poluravan* $\mathbb{H}$.

Neka je sada $g : \partial\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna neprekidna ograničena funkcija na $\partial\mathbb{H}$.

Motivisani prethodnim razmatranjem definišimo funkciju $P[g] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ na sledeći način

$$P[g](x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x - \tau)^2 + y^2} g(\tau, 0) d\tau.$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 4 (Egzistencija rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na poluravni $\mathbb{H}$)

Funkcija $u : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(x, y) = \begin{cases} P[g](x, y), & (x, y) \in \mathbb{H}, \\ g(x, y), & (x, y) \in \partial\mathbb{H}, \end{cases}$$

jeste rešenje odgovarajućeg Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na poluravni $\mathbb{H}$.

Dakle, funkcija u ima sledeća svojstva:

- 1° $u \in C(\overline{\mathbb{H}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{H}; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x, y) = 0$ za svako $(x, y) \in \mathbb{H}$;
- 3° $u(x, y) = g(x, y)$ za svako $(x, y) \in \partial\mathbb{H}$;
- 4° u je ograničena na $\overline{\mathbb{H}}$.

Dokaz teoreme uraditi za domaći zadatak.