

13. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 21. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Nojmanov problem za Laplasovu jednačinu

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena oblast takva da je $\partial\Omega$ unija tragova konačno mnogo neprekidno diferencijabilnih krivih γ_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) takvih da je $\gamma_j' \neq 0$ i neka je $h \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$ data funkcija. *Nojmanov problem za Laplasovu jednačinu na oblasti Ω* odnosi se na određivanje funkcije $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je:

1° $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R});$

2° $\Delta u(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in \overline{\Omega};$

3° $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = h(x, y)$, za svako $(x, y) \in \partial\Omega$ takvo da je $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y)$ definisano.

Napomena 1. Po definiciji važi $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ ako postoji otvoren skup D takav da je $\overline{\Omega} \subset D$ i $u \in C^2(D; \mathbb{R})$.

Napomena 2. Sa $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y)$ obeležavamo izvod funkcije u u pravcu spoljašnjeg jediničnog vektora normale na $\partial\Omega$ u tački $(x, y) \in \partial\Omega$.

Napomena 3. Kako je $\partial\Omega$ unija tragova konačno mnogo neprekidno diferencijabilnih krivih γ_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) takvih da je $\gamma'_j \neq 0$, sledi da spoljašnji jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ postoji u svakoj tački $(x, y) \in \partial\Omega$, osim eventualno u konačno mnogo takvih tačaka.

Napomena 4. Spoljašnji jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ u tački $(x, y) \in \partial\Omega$ obeležavamo sa $n(x, y) = (n_1(x, y), n_2(x, y))$. Osim toga, funkcija n je neprekidna i po modulu jednaka 1 u svakoj tački u kojoj je definisana.

Napomena 5. Za svako $(x, y) \in \partial\Omega$ za koje postoji $n(x, y)$ važi

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= \langle \nabla u(x, y), n(x, y) \rangle \\ &= u_x(x, y)n_1(x, y) + u_y(x, y)n_2(x, y).\end{aligned}$$

Stoga, kako je $|\langle \nabla u(x, y), n(x, y) \rangle| \leq |\nabla u(x, y)| \cdot |n(x, y)| = |\nabla u(x, y)|$ i kako je $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, sledi da je $\frac{\partial u}{\partial n}$ ograničena funkcija i neprekidna u svakoj tački u kojoj je definisana.

Napomena 6. Kako uslov $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = h(x, y)$ treba da bude ispunjen samo u onim tačkama $(x, y) \in \partial\Omega$ u kojima je $\frac{\partial u}{\partial n}$ definisano, dopuštamo i da funkcija h ne bude definisana u tačkama u kojima $\frac{\partial u}{\partial n}$ nije definisano. Naravno, iz pomenutog uslova sledi i da funkcija h mora biti neprekidna i ograničena na onom delu $\partial\Omega$ na kome je definisana.

Stav 1

Ako Nojmanov problem za Laplasovu jednačinu na ograničenoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ takvoj da je $\partial\Omega$ unija tragova konačno mnogo neprekidno diferencijabilnih krivih γ_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) takvih da je $\gamma'_j \neq 0$, ima rešenje onda je

$$\int_{\partial\Omega} h(x, y) ds = 0.$$

Dokaz. Na osnovu prvog Grinovog identiteta imamo

$$\iint_{\overline{\Omega}} \Delta u(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds(x, y).$$

Kako za svako $(x, y) \in \overline{\Omega}$ važi $\Delta u(x, y) = 0$ i kako za svako $(x, y) \in \partial\Omega$ osim konačno mnogo njih važi $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = h(x, y)$, sledi tvrđenje.

Stav 2

Ako su u_1 i u_2 rešenja Nojmanovog problema za Laplasovu jednačinu na ograničenoj oblasti Ω , takvoj da je $\partial\Omega$ unija tragova konačno mnogo neprekidno diferencijabilnih krivih γ_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) takvih da je $\gamma'_j \neq 0$, onda postoji konstanta C takva da je $u_1 = u_2 + C$.

Dokaz. Neka je $U = u_1 - u_2$.

Dokažimo da je U konstantna funkcija.

Neposredno se pokazuje da za funkciju U važi

- $U \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$;
- $\Delta U(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in \overline{\Omega}$;
- $\frac{\partial U}{\partial n}(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in \partial\Omega$, takvo da je $\frac{\partial U}{\partial n}(x, y)$ definisano.

Dalje, na osnovu drugog Grinovog identiteta važi:

$$\iint_{\overline{\Omega}} (U_x^2 + U_y^2) dx dy = - \iint_{\overline{\Omega}} U \Delta U dx dy + \int_{\partial\Omega} U \frac{\partial U}{\partial n} ds.$$

Kako za svako $(x, y) \in \overline{\Omega}$ važi $\Delta u(x, y) = 0$ i kako za svako $(x, y) \in \partial\Omega$ osim konačno mnogo njih važi $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$, sledi da je

$$\iint_{\overline{\Omega}} (U_x^2 + U_y^2) dx dy = 0.$$

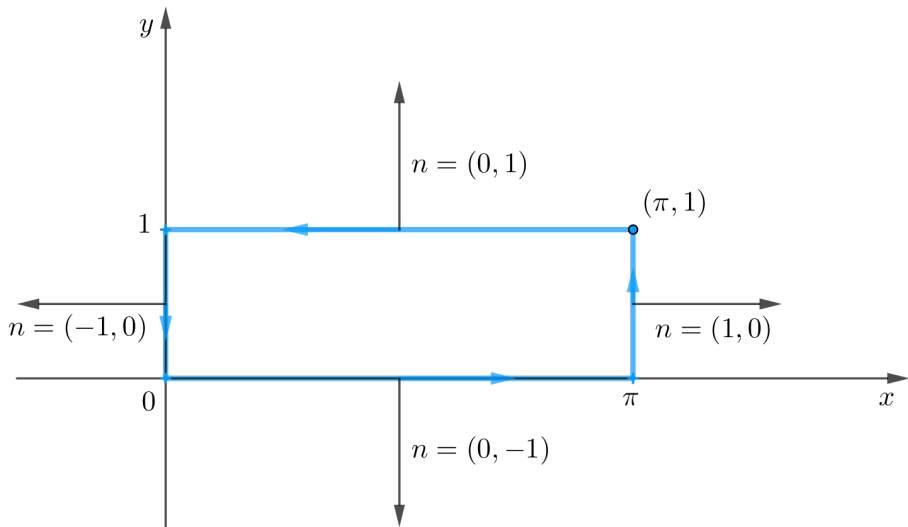
Iz prethodne jednakosti sledi da je $U_x^2(x, y) + U_y^2(x, y) = 0$ za svako $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

Otuda je $U_x(x, y) = U_y(x, y) = 0$ za svako $(x, y) \in \overline{\Omega}$, pa uzimajući u obzir da je Ω oblast dobijamo da je U konstantna funkcija.

Zadatak 1

Neka je $Q = (0, \pi) \times (0, 1)$. U skupu $C^2(\overline{Q}; \mathbb{R})$ rešiti Nojmanov problem:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & (x, y) \in \overline{Q}, \\ u_y(x, 0) &= 2 \cos x, & 0 < x < \pi, \\ u_x(\pi, y) &= 0, & 0 < y < 1, \\ u_y(x, 1) &= \cos x, & 0 < x < \pi, \\ u_x(0, y) &= 0, & 0 < y < 1.\end{aligned}$$



Neka je

$$\begin{aligned}l_1 &= \{(x, 0) : 0 < x < \pi\}, \\l_2 &= \{(\pi, y) : 0 < y < 1\}, \\l_3 &= \{(x, 1) : 0 < x < \pi\}, \\l_4 &= \{(0, y) : 0 < y < 1\}.\end{aligned}$$

Tada je $\partial Q = \overline{l_1} \cup \overline{l_2} \cup \overline{l_3} \cup \overline{l_4}$.

Takođe važi i

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \begin{cases} -u_y(x, y), & \text{ako } (x, y) \in l_1, \\ u_x(x, y), & \text{ako } (x, y) \in l_2, \\ u_y(x, y), & \text{ako } (x, y) \in l_3, \\ -u_x(x, y), & \text{ako } (x, y) \in l_4. \end{cases}$$

Neophodan uslov da dati problem ima rešenje jeste $\int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = 0$.

Parametrizacija krive $\overline{l_1}$ jeste

$$\begin{aligned}x(t) &= \pi t, \\ y(t) &= 0,\end{aligned}$$

pri čemu $t \in [0, 1]$. Otuda je

$$\int_{\overline{l_1}} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = \int_0^1 -u_y(\pi t, 0) \cdot \pi dt = \int_0^1 -2\pi \cos \pi t dt = 0.$$

Parametrizacija krive $\overline{l_2}$ jeste

$$\begin{aligned}x(t) &= \pi, \\ y(t) &= t,\end{aligned}$$

pri čemu $t \in [0, 1]$. Otuda je

$$\int_{\overline{l_2}} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = \int_0^1 u_x(\pi, t) \cdot 1 dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Parametrizacija krive $\overline{l_3}$ jeste

$$\begin{aligned}x(t) &= \pi(1 - t), \\y(t) &= 1,\end{aligned}$$

pri čemu $t \in [0, 1]$. Otuda je

$$\int_{\overline{l_3}} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = \int_0^1 -u_y(\pi(1 - t), 1) \cdot (-\pi) dt = \int_0^1 \pi \cos \pi(1 - t) dt = 0.$$

Parametrizacija krive $\overline{l_4}$ jeste

$$\begin{aligned}x(t) &= 0, \\y(t) &= 1 - t,\end{aligned}$$

pri čemu $t \in [0, 1]$. Otuda je

$$\int_{\overline{l_4}} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = \int_0^1 u_x(0, 1 - t) \cdot (-1) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Kako je

$$\int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = \sum_{j=1}^4 \int_{\bar{l}_j} \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) ds = 0,$$

sledi da je ispunjen neophodan uslov da dati problem ima rešenje.

Potražimo funkciju u u obliku $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Tada iz $\Delta u(x, y) = 0$ sledi

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

i otuda

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osim toga, iz

$$u_x(0, y) = 0$$

i

$$u_x(0, y) = X'(0)Y(y),$$

uz pretpostavku da Y nije identički jednako 0, dobijamo $X'(0) = 0$.

Takođe, iz

$$u_x(\pi, y) = 0$$

i

$$u_x(\pi, y) = X'(\pi)Y(y),$$

uz pretpostavku da Y nije identički jednako 0, dobijamo $X'(\pi) = 0$.

Dakle, funkcija X jeste rešenje problema (Šturm-Liuvilov problem):

$$\begin{aligned}X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\X'(0) &= 0, \\X'(\pi) &= 0.\end{aligned}$$

Dati problem ima netrivialno rešenje jedino ako je $\lambda = \lambda_k = k^2$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$.

Štaviše, za $k \in \mathbb{N}_0$, proizvoljno rešenje X_k problema

$$\begin{aligned}X''(x) + k^2 X(x) &= 0, \\X'(0) &= 0, \\X'(\pi) &= 0,\end{aligned}$$

jeste oblika $C_k \cos kx$, pri čemu je $C_k \in \mathbb{R}$.

Za domaći zadatak detaljno rešiti ovaj problem.

Odredimo sada rešenje jednačine

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

pri čemu je $\lambda = \lambda_k = k^2$ i $k \in \mathbb{N}_0$.

Ako je $k = 0$ onda je $Y(y) = Y_0(y) = A_0 + B_0y$, pri čemu su $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$.

Ako je $k > 0$ onda je $Y(y) = Y_k(y) = A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}$, pri čemu su $A_k, B_k \in \mathbb{R}$.

Otuda je,

$$u(x, y) = u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y),$$

pri čemu je $k \in \mathbb{N}_0$.

Svaka od funkcija u_k , zadovoljava jednačinu $\Delta u_k = 0$, kao i uslove $\frac{\partial u_k}{\partial x}(0, y) = 0$ i $\frac{\partial u_k}{\partial x}(\pi, y) = 0$, za svako $y \in [0, 1]$.

Isto važi i za svaku konačnu sumu takvih funkcija.

Dakle, prirodno je rešenje odgovarajućeg Nojmanovog problema za Laplasovu jednačinu potražiti u obliku

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, y) \\&= (A_0 + B_0 y) \cdot C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky} \right) \cdot C_k \cos kx \\&= a_0 + b_0 y + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k e^{ky} + b_k e^{-ky} \right) \cdot \cos kx,\end{aligned}$$

pri čemu su $a_k = A_k \cdot C_k$ i $b_k = B_k \cdot C_k$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$.

Dalje, na osnovu graničnih uslova, za svako $x \in [0, \pi]$ važi

$$u_y(x, 0) = 2 \cos x$$

i

$$u_y(x, 1) = \cos x.$$

S druge strane, kako je

$$u_y(x, y) = b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(a_k e^{ky} - b_k e^{-ky} \right) \cdot \cos kx,$$

sledi da za svako $x \in [0, \pi]$ važi

$$u_y(x, 0) = b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k (a_k - b_k) \cdot \cos kx,$$

i

$$u_y(x, 1) = b_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(a_k e^k - b_k e^{-k} \right) \cdot \cos kx.$$

Dakle, $b_0 = 0$, koeficijente $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned}a_1 - b_1 &= 2, \\ a_1 e - b_1 e^{-1} &= 1,\end{aligned}$$

a koeficijente $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, za $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned}a_k - b_k &= 0, \\ a_k e^k + b_k e^{-k} &= 0.\end{aligned}$$

Otuda je $b_0 = 0$, $a_1 = \frac{1 - 2e^{-1}}{2 \operatorname{sh} 1}$, $b_1 = \frac{1 - 2e}{2 \operatorname{sh} 1}$ i $a_k = b_k = 0$, za svako $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dakle,

$$u(x, y) = \frac{1 - 2e^{-1}}{2 \operatorname{sh} 1} e^y \cos x + \frac{1 - 2e}{2 \operatorname{sh} 1} e^{-y} \cos x + a_0,$$

pri čemu je $a_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Neposredno se proverava da

- $u \in C^2(\overline{Q}; \mathbb{R})$;
- $\Delta u(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in \overline{Q}$;
- $u_y(x, 0) = 2 \cos x$, za svako $x \in (0, \pi)$;
- $u_x(\pi, y) = 0$, za svako $y \in (0, 1)$;
- $u_y(x, 1) = \cos x$, za svako $x \in (0, \pi)$;
- $u_x(0, y) = 0$, za svako $y \in (0, 1)$.

Na osnovu prethodnog stava znamo da je rešenje datog problema jedinstveno do na aditivnu konstantu.

Dakle, dati problem nema drugih rešenja.

Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na prstenu

Neka je $0 \leq r < R \leq +\infty$ i $P = P(0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

Oblast $P(0, r, R)$ naziva se i prsten sa centrom 0, malim poluprečnikom r i velikim poluprečnikom R .

Teorema 1

Neka je $u : P \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na P . Tada postoje holomorfna funkcija $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ i $c \in \mathbb{R}$ takvi da za svako $z \in P$ važi

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \ln |z|.$$

Kako bismo dokazali ovu teoremu najpre ćemo se podsetiti Loranove teoreme i dokazati tri leme.

Teorema 2 (Loranova teorema)

Neka je $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na P . Tada za svako $z \in P$ važi

$$(1) \qquad g(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k,$$

gde je $c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{g(z)}{z^{k+1}} dz$, $r < \rho < R$ i $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow P$ definisana sa $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$.

Napomenimo da koeficijenti c_k ne zavise od ρ .

Red sa desne strane jednakosti (1) naziva se Loranov red funkcije g na prstenu P .

Lema 1

Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup i $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na D . Tada je funkcija $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa

$$g(z) = u_x(z) - iu_y(z)$$

holomorfna funkcija na D .

Dokaz leme. Neka je $U = u_x$ i $V = -u_y$. Dovoljno je da dokažemo da su U i V diferencijabilne na D i da važe Koši-Rimanovi uslovi ($U_x = V_y$ i $U_y = -V_x$).

Funkcije U i V su diferencijabilne na D (štaviše beskonačno puta neprekidno diferencijabilne), jer je u harmonijska funkcija na D .

Dalje imamo $U_x = u_{xx}$, $V_y = -u_{yy}$, $U_y = u_{yx}$ i $V_x = -u_{xy}$, pa kako je u harmonijska funkcija na D , sledi da $U_x = V_y$ i $U_y = -V_x$.

Lema 2

Neka je $u : P \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na P i neka je c_{-1} odgovarajući koeficijent Loranovog reda holomorfne funkcije $g = u_x - iu_y$ na prstenu P . Tada je $c_{-1} \in \mathbb{R}$.

Dokaz leme. Važi

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} g(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (u_x - iu_y)(\rho e^{it}) i \rho e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (u_x(\rho e^{it}) \rho \cos t + u_y(\rho e^{it}) \rho \sin t) dt \right. \\ &\quad \left. + i \int_0^{2\pi} (u_x(\rho e^{it}) \rho \sin t - u_y(\rho e^{it}) \rho \cos t) dt \right). \end{aligned}$$

Dakle, potrebno i dovoljno je dokazati jednakost

$$\int_0^{2\pi} (u_x(\rho e^{it})\rho \sin t - u_y(\rho e^{it})\rho \cos t) dt = 0.$$

U tom cilju, neka je $\Phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\Phi(t) = u(\rho e^{it}).$$

Neposredno se pokazuje da za svako $t \in [0, 2\pi]$ važi

$$\Phi'(t) = -(u_x(\rho e^{it})\rho \sin t - u_y(\rho e^{it})\rho \cos t).$$

Otuda imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (u_x(\rho e^{it})\rho \sin t - u_y(\rho e^{it})\rho \cos t)dt &= -\int_0^{2\pi} \Phi'(t)dt \\ &= -(\Phi(2\pi) - \Phi(0)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Lema 3

Neka je $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $c_{-1} = 0$. Tada postoji holomorfna funkcija $G : P \rightarrow \mathbb{C}$ takva da za svako $z \in P$ važi $G'(z) = g(z)$.

Dokaz leme. Kako za svako $z \in P$ važi

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k,$$

funkciju G možemo definisati na sledeći način:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}.$$

Detalje proveriti za domaći zadatak.

Dokaz teoreme.

Neka je $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa $g(z) = u_x(z) - iu_y(z)$. Na osnovu leme 1 funkcija g je holomorfna na P . Neka je c_{-1} odgovarajući koeficijent Loranovog reda funkcije g na prstenu P . Na osnovu leme 2 imamo da $c_{-1} \in \mathbb{R}$.

Neka je $h : P \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa

$$(2) \quad h(z) = g(z) - \frac{c_{-1}}{z} = u_x(z) - iu_y(z) - \frac{c_{-1}}{z}.$$

Kako funkcija h zadovoljava pretpostavke leme 3, na osnovu te leme postoji holomorfna funkcija $H : P \rightarrow \mathbb{C}$ takva da za svako $z \in P$ važi

$$(3) \quad H'(z) = h(z).$$

Neka je $U = \operatorname{Re} H$. Tada je $H' = U_x - iU_y$, pa na osnovu (2) i (3) za svako $z \in P$ važi

$$U_x(z) - iU_y(z) = u_x(z) - iu_y(z) - \frac{c_{-1}}{z},$$

tj. za svako $(x, y) \in P$ važi

$$(4) \quad U_x(x, y) = u_x(x, y) - c_{-1} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

i

$$(5) \quad U_y(x, y) = u_y(x, y) - c_{-1} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Iz (4) i (5) dobijamo da za svako $(x, y) \in P$ važi

$$\left(U(x, y) - u(x, y) + c_{-1} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)_x = 0$$

i

$$\left(U(x, y) - u(x, y) + c_{-1} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)_y = 0.$$

Stoga, uzimajući u obzir da je P oblast dobijamo da postoji realna konstanta C takva da za svako $(x, y) \in P$ važi

$$U(x, y) - u(x, y) + c_{-1} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Konačno, za svako $z = (x, y) \in P$ važi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U(x, y) + c_{-1} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - C \\ &= \operatorname{Re}(H(z) - C) + c_{-1} \ln |z|. \end{aligned}$$

Dakle, $f(z) = H(z) - C$ i $c = c_{-1}$. Teorema je dokazana.

Neka je $0 \leq r < R \leq +\infty$, $P = P(0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ i $u : P \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na P .

Na osnovu teoreme 1 postoje holomorfna funkcija $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \ln |z|,$$

za svako $z \in P$.

Na osnovu Loranove teoreme postoje C_k ($k \in \mathbb{Z}$) takvi da za svako $z \in P$ važi

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k z^k.$$

Otuda, za svako $z \in P$ imamo

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2} \left(f(z) + \overline{f(z)} \right) + c \ln |z| \\ (6) \quad &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{C_k} \bar{z}^k \right) + c \ln |z|. \end{aligned}$$

Dalje, ako je $z = \rho e^{i\varphi}$, gde je $r < \rho < R$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ onda iz (6) dobijamo

$$\begin{aligned} u(\rho e^{i\varphi}) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \rho^k e^{ik\varphi} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{C_k} \rho^k e^{-ik\varphi} \right) + c \ln \rho \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho^k \left(C_k e^{ik\varphi} + \overline{C_k} e^{-ik\varphi} \right) + c \ln \rho. \end{aligned}$$

Ako je $C_k = A_k - iB_k$, gde su $A_k, B_k \in \mathbb{R}$, onda neposrednim sređivanjem izraza dobijamo

$$C_k e^{ik\varphi} + \overline{C_k} e^{-ik\varphi} = 2(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi).$$

Dakle, za $r < \rho < R$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) + c \ln \rho,$$

tj.

$$\begin{aligned} u(\rho e^{i\varphi}) &= A_0 + c \ln \rho + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^{-k} (A_{-k} \cos k\varphi - B_{-k} \sin k\varphi). \end{aligned}$$

Konačno, ako je $a_0 = A_0$, $b_0 = c$ i $a_k = A_k$, $b_k = A_{-k}$, $c_k = B_k$ i $d_k = -B_{-k}$ ($k \in \mathbb{N}$) imamo da za $r < \rho < R$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned} u(\rho e^{i\varphi}) &= a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k} \right) \cos k\varphi \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \rho^k + d_k \rho^{-k} \right) \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Zadatak 2

Neka je $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada $C(\overline{P}; \mathbb{R}) \cap C^2(P; \mathbb{R})$ i dokazati da je jedinstveno):

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in P,$$

$$u(x, y) = 1 - x, \quad (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}xy, \quad (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Jedinstvenost sledi iz činjenice da je P ograničena oblast.

Potražimo rešenje u obliku

$$(7) \quad \begin{aligned} u(\rho e^{i\varphi}) = & a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k} \right) \cos k\varphi \\ & + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(c_k \rho^k + d_k \rho^{-k} \right) \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Vrednosti koeficijenata a_k i b_k ($k \in \mathbb{N}_0$) i koeficijenata c_k i d_k ($k \in \mathbb{N}$) odredićemo iz graničnog uslova.

Na osnovu graničnog uslova dobijamo da za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$u(e^{i\varphi}) = 1 - \cos \varphi$$

i

$$u(2e^{i\varphi}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \varphi \cdot 2 \sin \varphi = \sin 2\varphi,$$

dok iz (7) dobijamo da za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$u(e^{i\varphi}) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k + d_k) \sin k\varphi$$

i

$$\begin{aligned} u(2e^{i\varphi}) &= a_0 + b_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k 2^k + b_k 2^{-k}) \cos k\varphi \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k 2^k + d_k 2^{-k}) \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Dakle, za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$(8) \quad 1 - \cos \varphi = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k + d_k) \sin k\varphi.$$

i

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin 2\varphi = a_0 + b_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k 2^k + b_k 2^{-k}) \cos k\varphi \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k 2^k + d_k 2^{-k}) \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Iz (8) dobijamo $a_0 = 1$, $a_1 + b_1 = -1$, $a_k + b_k = 0$ za svako $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, kao i $c_k + d_k = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Iz (9) dobijamo $a_0 + b_0 \ln 2 = 0$, $a_k 2^k + b_k 2^{-k} = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$, $c_2 2^2 + d_2 2^{-2} = 1$, kao i $c_k 2^k + d_k 2^{-k} = 0$ za svako $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

Dakle, koeficijenti $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ jesu rešenja sistema jednačina:

$$\begin{aligned}a_0 &= 1, \\a_0 + b_0 \ln 2 &= 0.\end{aligned}$$

Koeficijenti $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ jesu rešenja sistema jednačina:

$$\begin{aligned}a_1 + b_1 &= -1, \\a_1 2^1 + b_1 2^{-1} &= 0.\end{aligned}$$

Koeficijenti $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, pri čemu je $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, jesu rešenja sistema jednačina:

$$\begin{aligned}a_k + b_k &= 0, \\a_k 2^k + b_k 2^{-k} &= 0.\end{aligned}$$

Dalje, koeficijenti $c_2, d_2 \in \mathbb{R}$ jesu rešenja sistema jednačina:

$$\begin{aligned}c_2 + d_2 &= 0, \\c_2 2^2 + d_2 2^{-2} &= 1.\end{aligned}$$

Koeficijenti $c_k, d_k \in \mathbb{R}$, pri čemu je $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, jesu rešenja sistema jednačina:

$$\begin{aligned}c_k + d_k &= 0, \\c_k 2^k + d_k 2^{-k} &= 0.\end{aligned}$$

Rešavanjem navedenih sistema jednačina dobijamo:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = -\frac{1}{\ln 2}, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad b_1 = -\frac{4}{3}, \quad a_k = 0, \text{ za svako } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$
$$b_k = 0, \text{ za svako } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad c_2 = \frac{4}{15}, \quad d_2 = -\frac{4}{15}, \quad c_k = 0, \text{ za svako}$$
$$k \in \mathbb{N} \setminus \{2\} \text{ i } d_k = 0, \text{ za svako } k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}.$$

Otuda

$$u(\rho e^{i\varphi}) = 1 - \frac{1}{\ln 2} \ln \rho + \left(\frac{1}{3} \rho - \frac{4}{3} \rho^{-1} \right) \cos \varphi + \left(\frac{4}{15} \rho^2 - \frac{4}{15} \rho^{-2} \right) \sin 2\varphi.$$

Dalje, kako je $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, kao i

$$\begin{aligned}\ln \rho &= \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \rho \cos \varphi &= x, \\ \rho^{-1} \cos \varphi &= \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \rho^2 \sin 2\varphi &= 2(\rho \cos \varphi)(\rho \sin \varphi) = 2xy, \\ \rho^{-2} \sin 2\varphi &= \frac{\rho^2 \sin 2\varphi}{\rho^4} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},\end{aligned}$$

sledi da je

$$u(x, y) = 1 - \frac{1}{\ln 2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{8}{15}xy - \frac{8}{15} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Neposredno se proverava da

- $u \in C(\overline{P}; \mathbb{R}) \cap C^2(P; \mathbb{R})$;
- $\Delta u(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in P$;
- $u(x, y) = 1 - x$, za svako $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
- $u(x, y) = \frac{1}{2}xy$, za svako $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$.