

12. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 16. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup.

Puasonova jednačina (preciznije, *Puasonova jednačina na D*) jeste parcijalna jednačina

$$\Delta u = f,$$

pri čemu je $f \in C(D; \mathbb{R})$ data funkcija i $u \in C^2(D; \mathbb{R})$ nepoznata funkcija.

Dirihleov problem za Puasonovu jednačinu

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast i neka su $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ i $g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$ date funkcije. *Dirihleov problem za Puasonovu jednačinu na oblasti Ω* odnosi se na određivanje funkcije $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

- 1° $u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x) = f(x)$, za svako $x \in \Omega$;
- 3° $u(x) = g(x)$, za svako $x \in \partial\Omega$.

Stav 1

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast. Dirihleov problem za Puasonovu jednačinu na oblasti Ω može imati najviše jedno rešenje.

Dokaz uraditi za domaći zadatak.

Zadatak 1

Neka je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada $C(\overline{D}; \mathbb{R}) \cap C^2(D; \mathbb{R})$ i dokazati da je jedinstveno):

$$\Delta u = x, \quad (x, y) \in D,$$

$$u(x, y) = x + y^2, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Jedinstvenost sledi iz činjenice da je D ograničena oblast.

Ideja je da dati Dirihleov problem za Puasonovu jednačinu svedemo na Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu. U tom cilju prvo odredimo partikularno rešenje u_p date Puasonove jednačine. Zatim uvodimo smenu $w = u - u_p$. Neposredno se proverava da funkcija w zadovoljava jednačinu

$$\Delta w = 0.$$

Takođe, za $(x, y) \in \partial D$ važi $w(x, y) = u(x, y) - u_p(x, y)$.

Neposredno se provereva da je $u_p(x, y) = \frac{x^3}{6}$ jedno partikularno rešenje date Puasonove jednačine.

Stoga se dati problem nakon smene $w = u - u_p$ svodi na problem

$$\Delta w = 0, \quad (x, y) \in D,$$

$$w(x, y) = x + y^2 - \frac{x^3}{6}, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Nastavak neka ostane za domaći zadatak.

Zadatak 2

Neka je $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada $C(\overline{Q}; \mathbb{R}) \cap C^2(Q; \mathbb{R})$ i dokazati da je jedinstveno):

$$\Delta u = \sin \pi x \sin \pi y, \quad (x, y) \in Q,$$

$$u(x, 0) = 4 \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Jedinstvenost sledi iz činjenice da je Q ograničena oblast.

Ideja je da dati Dirihleov problem za Puasonovu jednačinu svedemo na Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu. U tom cilju prvo odredimo partikularno rešenje u_p date Puasonove jednačine.

Potražimo partikularno rešenje u obliku $u_p(x, y) = A \sin \pi x \sin \pi y$, gde je $A \in \mathbb{R}$. Iz

$$\Delta u_p = \sin \pi x \sin \pi y$$

dobijamo

$$-2A\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y = \sin \pi x \sin \pi y$$

i otuda $A = -\frac{1}{2\pi^2}$. Dakle,

$$u_p(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \sin \pi x \sin \pi y.$$

Uvedimo smenu $v = u - u_p$. Tada je funkcija u rešenje datog problema ako i samo ako je funkcija v rešenje problema

$$\Delta v = 0, \quad (x, y) \in Q,$$

$$v(x, 0) = 4 \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$v(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$v(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$v(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Potražimo funkciju v u obliku $v(x, y) = X(x)Y(y)$.

Tada iz $\Delta v(x, y) = 0$ sledi

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

i otuda

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osim toga, iz

$$v(0, y) = 0$$

i

$$v(0, y) = X(0)Y(y),$$

uz pretpostavku da Y nije identički jednako 0, dobijamo $X(0) = 0$.

Takođe, iz

$$v(1, y) = 0$$

i

$$v(1, y) = X(1)Y(y),$$

uz pretpostavku da Y nije identički jednako 0, dobijamo $X(1) = 0$.

Dakle, funkcija X jeste rešenje problema (Šturm-Liuvilov problem):

$$\begin{aligned}X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\X(0) &= 0, \\X(1) &= 0.\end{aligned}$$

Dati problem ima netrivialno rešenje jedino ako je $\lambda = \lambda_k = k^2\pi^2$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}$.

Štaviše, za $k \in \mathbb{N}$, proizvoljno rešenje X_k problema

$$\begin{aligned}X''(x) + k^2\pi^2 X(x) &= 0, \\X(0) &= 0, \\X(1) &= 0,\end{aligned}$$

jeste oblika $C_k \sin k\pi x$, pri čemu je $C_k \in \mathbb{R}$.

Odredimo sada rešenje jednačine

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

pri čemu je $\lambda = \lambda_k = k^2\pi^2$ i $k \in \mathbb{N}$.

Proizvoljno rešenje Y_k te jednačine jeste oblika

$$A_k e^{k\pi y} + B_k e^{-k\pi y},$$

pri čemu su $A_k, B_k \in \mathbb{R}$.

Otuda je,

$$v(x, y) = v_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y),$$

pri čemu je $k \in \mathbb{N}$. Svaka od funkcija v_k , zadovoljava jednačinu $\Delta v_k = 0$, kao i uslove $v_k(0, y) = 0$ i $v_k(1, y) = 0$, za svako $y \in [0, 1]$.

Isto važi i za svaku konačnu sumu takvih funkcija.

Dakle, prirodno je rešenje odgovarajućeg Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu potražiti u obliku

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k e^{k\pi y} + B_k e^{-k\pi y} \right) \cdot C_k \sin k\pi x \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k e^{k\pi y} + b_k e^{-k\pi y} \right) \cdot \sin k\pi x, \end{aligned}$$

pri čemu su $a_k = A_k \cdot C_k$ i $b_k = B_k \cdot C_k$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Dalje, na osnovu graničnih uslova, za svako $x \in [0, 1]$ važi

$$v(x, 0) = 4 \sin \pi x$$

i

$$v(x, 1) = 0.$$

S druge strane, na osnovu oblika rešenja, za svako $x \in [0, 1]$ važi

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k) \sin k\pi x$$

i

$$v(x, 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k e^{k\pi} + b_k e^{-k\pi}) \sin k\pi x$$

Dakle, koeficijente $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned}a_1 + b_1 &= 4, \\ a_1 e^\pi + b_1 e^{-\pi} &= 0.\end{aligned}$$

A koeficijente $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, za $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, dobijamo rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned}a_k + b_k &= 0, \\ a_k e^{k\pi} + b_k e^{-k\pi} &= 0.\end{aligned}$$

Otuda je $a_1 = -\frac{2e^{-\pi}}{\operatorname{sh} \pi}$, $b_1 = \frac{2e^\pi}{\operatorname{sh} \pi}$ i $a_k = b_k = 0$, za svako $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Dakle,

$$v(x, y) = \left(-\frac{2e^{-\pi}}{\operatorname{sh} \pi} e^{\pi y} + \frac{2e^{\pi}}{\operatorname{sh} \pi} e^{-\pi y} \right) \sin \pi x,$$

tj.

$$v(x, y) = \frac{4 \operatorname{sh} \pi (1 - y)}{\operatorname{sh} \pi} \sin \pi x.$$

Neposredno se proverava da

- $v \in C(\overline{Q}; \mathbb{R}) \cap C^2(Q; \mathbb{R})$;
- $\Delta v(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in Q$;
- $v(x, 0) = 4 \sin \pi x$, za svako $x \in [0, 1]$;
- $v(x, 1) = 0$, za svako $x \in [0, 1]$;
- $v(0, y) = 0$, za svako $y \in [0, 1]$;
- $v(1, y) = 0$, za svako $y \in [0, 1]$.

Konačno,

$$u(x, y) = \frac{4 \operatorname{sh} \pi(1 - y)}{\operatorname{sh} \pi} \sin \pi x - \frac{1}{2\pi^2} \sin \pi x \sin \pi y.$$

Zadatak 3

Neka je $D = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$.

Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada $C(\overline{D}, \mathbb{R}) \cap C^2(D, \mathbb{R})$ i dokazati da je jedinstveno):

$$\Delta u(x, y) = x, \quad (x, y) \in D,$$

$$u(e^{it}) = \sin 2t + \frac{1}{8} \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(2e^{it}) = \sin 4t + \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(r) = \frac{r^3}{8}, \quad 1 \leq r \leq 2,$$

$$u(ir) = 0, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

Rešenje. Jedinstveno rešenje ovog problema jeste funkcija $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(z) = \operatorname{Im} \left(-\frac{1}{15}z^2 - \frac{16}{15}z^{-2} + \frac{16}{255}z^4 + \frac{16}{255}z^{-4} \right) + |z|^2 \operatorname{Re} z.$$