11. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 14. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Predstavljanje harmonijskih funkcija redovima

Neka je $R > 0$, $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ i $u : D(0, R) \to \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na $D(0, R)$.

Tada postoji holomorfna funkcija $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ takva da je $\operatorname{Re} f = u$.

Na osnovu Tejlorove teoreme, postoje $c_k \in \mathbb{C}$ $(c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!})$ takvi da za svako $z \in D(0, R)$ važi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k.$$

Otuda, za svako $z \in D(0,R)$ imamo

$$
\begin{aligned}
u(z) &= \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{c_k z}^k\right).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dalje, ako je $z = \rho e^{i\varphi}$, gde je $0 \leqslant \rho < R$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ onda iz (1) dobijamo

$$
\begin{aligned}
u(\rho e^{i\varphi}) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \rho^k e^{ik\varphi} + \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{c_k} \rho^k e^{-ik\varphi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \left(c_k e^{ik\varphi} + \overline{c_k} e^{-ik\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Ako je $c_k = a_k - ib_k$, gde su $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, onda neposrednim sređivanjem izraza dobijamo

$$c_k e^{ik\varphi} + \overline{c_k} e^{-ik\varphi} = 2(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Dakle, za $0 \leqslant \rho < R$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Zadatak 1

Neka je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r_0^2\}$. *Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada* $C(\overline{D}; \mathbb{R}) \cap C^2(D; \mathbb{R})$ *i dokazati da je jedinstveno):*

$$\Delta u = 0, \qquad (x, y) \in D,$$

$$u(x, y) = \left(\frac{y}{r_0}\right)^2, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Dati problem je Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na disku. Stoga, znamo da ovaj problem ima jedinstveno rešenje.

Potražimo rešenje u obliku

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \tag{3}$$

Vrednosti koeficijenata a_k i b_k odredićemo iz graničnog uslova.

Na osnovu graničnog uslova dobijamo da za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$u(r_0 e^{i\varphi}) = \left(\frac{r_0 \sin \varphi}{r_0} \right)^2 = \sin^2 \varphi,$$

dok iz (3) dobijamo da za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$u(r_0 e^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_0^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Dakle, za svako $\varphi \in \mathbb{R}$ važi

$$\sin^2 \varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} r_0^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

odnosno

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} r_0^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Otuda je $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 r_0^2 = -\frac{1}{2}$, $a_k = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$, kao i $b_k = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}_0$.

Dakle,

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r_0^2}\rho^2 \cos 2\varphi.$$

Otuda, kako je

$$\rho^2 \cos 2\varphi = \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi = x^2 - y^2,$$

sledi

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2r_0^2}(x^2 - y^2).$$

Neposredno se proverava da

- $u \in C(\overline{D}; \mathbb{R}) \cap C^2(D; \mathbb{R})$;
- $\Delta u(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in D$;
- $u(x, y) = \left(\dfrac{y}{r_0} \right)^2$, za svako $(x, y) \in \partial D$.

Zadatak 2

Neka je $a > 0$, $0 < \alpha < 2\pi$ *i* $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < a, \arg z \in (0, \alpha)\}$. *Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada* $C(\overline{D}; \mathbb{R}) \cap C^2(D; \mathbb{R})$ *i dokazati da je jedinstveno):*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && z \in D, \\ u(\rho) &= 0, && 0 \leqslant \rho \leqslant a, \\ u(\rho e^{i\alpha}) &= 0, && 0 \leqslant \rho \leqslant a, \\ u(a e^{i\varphi}) &= \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right), && 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha. \end{aligned}$$

Kako je dati problem Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na Žordanovoj oblasti D, znamo da postoji jedinstveno rešenje.

Kako ćemo eksplicitno odrediti to rešenje?

Laplasijan u polarnim koordinatama

Ponekad je (kad razmatramo Laplasijan funkcije dve promenljive na disku, kružnom prstenu, kružnom isečku,...) pogodnije preći na polarne koordinate $\rho \in [0, +\infty)$ i $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neprazan otvoren skup i neka je $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Ako je $(\rho, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \in \Omega$ i $v(\rho, \varphi) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ onda je

$$(\Delta u)(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = v_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \frac{1}{\rho} v_\rho(\rho, \varphi) + \frac{1}{\rho^2} v_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi).$$

Izraz s desne strane poslednje jednakosti naziva se i *Laplasijan u polarnim koordinatama*.

Dakle, kada pređemo na polarne koordinate, odnosno uradimo odgovarajući smenu, jednačina $\Delta u = 0$ svodi se na jednačinu

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\varphi\varphi} = 0,$$

Vratimo se na rešavanje zadatka.
U rešavanju ovog zadatka koristićemo polarne koordinate. Dakle, neka je $v(\rho,\varphi)=u(\rho e^{i\varphi})$, tj. $v(\rho,\varphi)=u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, pri čemu $(\rho,\varphi)\in[0,a]\times[0,\alpha]$. Tada se dati problem svodi na određivanje funkcije $v\in C(\overline{G};\mathbb{R})\cap C^2(G;\mathbb{R})$ $(G=(0,a)\times(0,\alpha))$ takve da je

$$\rho^2 v_{\rho\rho}+\rho v_\rho+v_{\varphi\varphi}=0,\quad (\rho,\varphi)\in(0,a)\times(0,\alpha),$$

$$v(\rho,0)=0,\quad 0\leqslant\rho\leqslant a,$$

$$v(\rho,\alpha)=0,\quad 0\leqslant\rho\leqslant a,$$

$$v(a,\varphi)=\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right),\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha.$$

Kako je $u(0)=0$ uzećemo i da je $v(0,\varphi)=0$ za svako $\varphi\in[0,\alpha]$.

Pretpostavimo da je $v(\rho, \varphi) = \mathcal{R}(\rho) \cdot \Phi(\varphi)$.

Tada je

$$\rho^2 \mathcal{R}''(\rho)\Phi(\varphi) + \rho \mathcal{R}'(\rho)\Phi(\varphi) + \mathcal{R}(\rho)\Phi''(\varphi) = 0,$$

odnosno

$$\frac{\rho^2 \mathcal{R}''(\rho) + \rho \mathcal{R}'(\rho)}{\mathcal{R}(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda,$$

pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Otuda je $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$, a iz graničnih uslova $v(\rho, 0) = 0$ i $v(\rho, \alpha) = 0$ dobijamo $\mathcal{R}(\rho) \cdot \Phi(0) = 0$ i $\mathcal{R}(\rho) \cdot \Phi(\alpha) = 0$.

Dalje, kako $\mathcal{R}$ nije identički jednako 0, sledi $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\alpha) = 0$.

Dakle, treba da rešimo problem

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\Phi(0) = 0,$$

$$\Phi(\alpha) = 0.$$

Ako bi bilo $\lambda < 0$ onda bi bilo $\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$, pri čemu su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni. U tom slučaju iz uslova $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\alpha) = 0$, sledi $(C_1, C_2) = (0, 0)$ tj. $\Phi(\varphi) = 0$.

Ako bi bilo $\lambda = 0$ onda bi bilo $\Phi(\varphi) = C_2\varphi + C_1$, pri čemu su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni. U tom slučaju iz uslova $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\alpha) = 0$, sledi $(C_1, C_2) = (0, 0)$ tj. $\Phi(\varphi) = 0$.

Ako bi bilo $\lambda > 0$ onda bi bilo $\Phi(\varphi) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\varphi$, pri čemu su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni. U tom slučaju iz uslova $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\alpha) = 0$, sledi

- $(C_1, C_2) = (0, C_{2,k})$, pri čemu je $C_{2,k} \in \mathbb{R}$ (ako je $\lambda = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2$, za neko $k \in \mathbb{N}$).
- $(C_1, C_2) = (0, 0)$ (ako je $\lambda \neq \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2$, za svako $k \in \mathbb{N}$).

Dakle, diferencijalna jednačina $\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0$ ima netrivijalno rešenje koje zadovoljava uslove $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\alpha) = 0$ ako i samo ako je $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2$ za neko $k \in \mathbb{N}$.

Štaviše proizvoljno rešenje jednačine $\Phi''(\varphi) + \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 \Phi(\varphi) = 0$ koje zadovoljava uslove $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\alpha) = 0$ jeste

$$\Phi(\varphi) = \Phi_k(\varphi) = C_{2,k} \sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi,$$

pri čemu je $C_{2,k} \in \mathbb{R}$, za svako $k \in \mathbb{N}$.

Odredimo sada odgovarajuće rešenje jednačine

$$\frac{\rho^2\mathcal{R}''(\rho)+\rho\mathcal{R}'(\rho)}{\mathcal{R}(\rho)}=\lambda,$$

pri čemu je $\lambda=\lambda_k=\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2$, za neko $k\in\mathbb{N}$.

U tom slučaju ta jednačina svodi se na jednačinu

$$\rho^2\mathcal{R}''(\rho)+\rho\mathcal{R}'(\rho)-\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2\mathcal{R}(\rho)=0.$$

Rešenje te jednačine jeste

$$\mathcal{R}(\rho)=\mathcal{R}_k(\rho)=A_k\rho^{\frac{k\pi}{\alpha}}+B_k\rho^{-\frac{k\pi}{\alpha}},$$

pri čemu su $A_k, B_k\in\mathbb{R}$ za svako $k\in\mathbb{N}$.

Otuda je

$$v(\rho,\varphi) = v_k(\rho,\varphi) = \mathcal{R}_k(\rho)\cdot\Phi_k(\varphi).$$

Svaka od funkcija v_k, pri čemu je $k \in \mathbb{N}$, zadovoljava jednačinu $\rho^2 v_{\rho\rho} + \rho v_\rho + v_{\varphi\varphi} = 0$, a isto važi i za svaku konačnu sumu takvih funkcija.

Dakle, prirodno je funkciju v koja je rešenje odgovarajućeg problema potražiti u obliku

$$\begin{aligned} v(\rho,\varphi) &= \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(\rho,\varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \rho^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k \rho^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right) \cdot C_{2,k} \sin \frac{k\pi}{\alpha}\varphi \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \rho^{\frac{k\pi}{\alpha}} + b_k \rho^{-\frac{k\pi}{\alpha}} \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{\alpha}\varphi, \end{aligned}$$

pri čemu su $a_k = A_k \cdot C_{2,k}$ i $b_k = B_k \cdot C_{2,k}$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Kako za svako $\varphi \in [0, \alpha]$ važi $v(0, \varphi) = 0$, sledi da je $b_k = 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

Dalje, za svako $\varphi \in [0, \alpha]$ važi

$$v(a, \varphi) = \sin \frac{\pi}{\alpha} \varphi,$$

dok na osnovu pretpostavke o obliku rešenja za svako $\varphi \in [0, \alpha]$ važi

$$v(a, \varphi) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k a^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin \frac{k\pi}{\alpha} \varphi$$

Otuda je $a_1 = a^{-\frac{\pi}{\alpha}}$ i $a_k = 0$ za svako $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

Dakle,

$$v(\rho, \varphi) = \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha}\varphi.$$

Neposredno se proverava da

- $v \in C(\overline{G}; \mathbb{R}) \cap C^2(G; \mathbb{R})$;
- $\rho^2 v_{\rho\rho} + \rho v_\rho + v_{\varphi\varphi} = 0$, za svako $(\rho, \varphi) \in G$;
- $v(\rho, 0) = 0$, za svako $0 \leqslant \rho \leqslant a$;
- $v(\rho, \alpha) = 0$, za svako $0 \leqslant \rho \leqslant a$;
- $v(a, \varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)$, za svako $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$.

Konačno, kako ćemo odrediti funkciju u?

Neka je $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(z) = \begin{cases} v(|z|, \arg z), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

tj.

$$u(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{|z|}{a}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\dfrac{\pi}{\alpha} \arg z\right), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Pokazaćemo da je funkcija u rešenje datog problema.

I. Pokažimo da $u \in C(\overline{D}; \mathbb{R})$.

Funkcija u je neprekidna na $\overline{D} \setminus \{0\}$ kao kombinacija neprekidnih funkcija.

Kako je

$$\lim_{z \to 0} u(z) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{|z|}{a} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \arg z \right) = 0,$$

i $u(0) = 0$ sledi da je funkcija u neprekidna i u 0.

II. Pokažimo da $u \in C^2(\overline{D}; \mathbb{R})$.

Neka je preslikavanje $\Psi : G \to D$ definisano sa $\Psi(\rho, \varphi) = \rho e^{i\varphi}$. Može se dokazati da je Ψ $C^\infty-$difeomorfizam oblasti G i D (uraditi to za domaći zadatak).

Takođe na D važi $u = v \circ \Psi^{-1}$.

Stoga, kako je $\Psi^{-1} \in C^\infty(D; G)$ i kako je $v \in C^\infty(G; \mathbb{R})$, sledi da je $u \in C^\infty(D; \mathbb{R}) \subsetneq C^2(D; \mathbb{R})$.

III. Pokažimo da $\Delta u(z) = 0$, za svako $z \in D$.

Kako za svako $(\rho, \varphi) \in G$ važi

$$(\Delta u)(\rho e^{i\varphi}) = \left(v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\varphi\varphi} \right)(\rho, \varphi)$$

i kako je za svako $(\rho, \varphi) \in G$ ispunjeno

$$\left(v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\varphi\varphi} \right)(\rho, \varphi) = 0,$$

sledi da je za svako $z \in D$ ispunjeno $\Delta u(z) = 0$.

IV. Pokažimo da važi

$$\begin{aligned} u(\rho) &= 0, && 0 \leqslant \rho \leqslant a, \\ u(\rho e^{i\alpha}) &= 0, && 0 \leqslant \rho \leqslant a, \\ u(a e^{i\varphi}) &= \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right), && 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha. \end{aligned}$$

Ove jednakosti neposredno slede iz definicije funkcije u (proveriti to za domaći zadatak).

Specijalno,
1) ako je $\alpha = \pi$ onda za $z \neq 0$ važi

$$\begin{aligned} u(z) &= \left(\frac{|z|}{a}\right)^{\frac{\pi}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi \arg z}{\pi}\right) \\ &= \left(\frac{|z|}{a}\right) \sin(\arg z) \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{Im} z. \end{aligned}$$

Štaviše, kako je $u(0,0) = 0$ imamo da za svako $(x,y) \in \overline{D}$ važi
$u(x,y) = \frac{y}{a}$;

2) ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ onda za $z \neq 0$ važi

$$\begin{aligned} u(z) &= \left(\frac{|z|}{a}\right)^{\frac{2\pi}{\pi}} \sin\left(\frac{2\pi \arg z}{\pi}\right) \\ &= \left(\frac{|z|}{a}\right)^{2} \sin(2 \arg z) \\ &= \left(\frac{|z|}{a}\right)^{2} \cdot 2 \sin(\arg z) \cos(\arg z) \\ &= \frac{2}{a^2} \cdot \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z. \end{aligned}$$

Štaviše, kako je $u(0,0) = 0$ imamo da za svako $(x,y) \in \overline{D}$ važi $u(x,y) = \frac{xy}{a^2}$.