10. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 9. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Obrat svojstva srednje vrednosti

Videli smo da puno svojstava harmonijskih funkcija slede iz svojstva srednje vrednosti.

Postavlja se prirodno pitanje da li svojstvo srednje vrednosti u potpunosti karakteriše harmonijske funkcije.

Važi sledeća teorema.

Teorema 1 (Obrat svojstva srednje vrednosti)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup i neka je $u : \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako za svaku tačku $a \in \Omega$ postoji niz r_j pozitivnih realnih brojeva takav da je $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$ i da za svako j važi

$$u(a) = \frac{1}{n\omega_n r_j^{n-1}} \int_{\partial B(a,r_j)} u(x) dS(x),$$

onda je funkcija u harmonijska na Ω.

Dokaz. Neka je $a \in \Omega$ fiksirano i neka je $R > 0$ takvo da $\overline{B}(a, R) \subset \Omega$.

Dalje, neka je funkcija $v : \overline{B}(a, R) \to \mathbb{R}$ rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti $B(a, R)$, pri čemu je odgovarajući granični uslov $v(x) = u(x)$ za svako $x \in \partial B(a, R)$.

Dokazaćemo da je $v(x) = u(x)$ za svako $x \in B(a, R)$. Otuda sledi da je u harmonijska na Ω.

Pretpostavimo da je funkcija $v - u$ pozitivna u nekoj tački iz $\overline{B}(a, R)$.

Neka je E skup tačaka iz $\overline{B}(a, R)$ u kojima funkcija $v - u$ dostiže maksimum. Objasniti zašto je skup E neprazan i kompaktan.

Neka je $y \in E$ takvo da je $|y - a| = \max\limits_{x \in E} |x - a|$. Jasno je da $y \in B(a, R)$.

Dalje, na osnovu pretpostavke postoji $r > 0$ takvo da je $\overline{B}(y, r) \subset B(a, R)$ i da važi

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} u(x) dS(x).$$

S druge strane, kako je funkcija v harmonijska na $B(a, R)$ na osnovu svojstva srednje vrednosti sledi

$$v(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} v(x) dS(x).$$

Dakle imamo

$$(v - u)(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} (v - u)(x) dS(x). \tag{1}$$

Kako funkcija $v - u$ dostiže maksimum u tački y, sledi da je

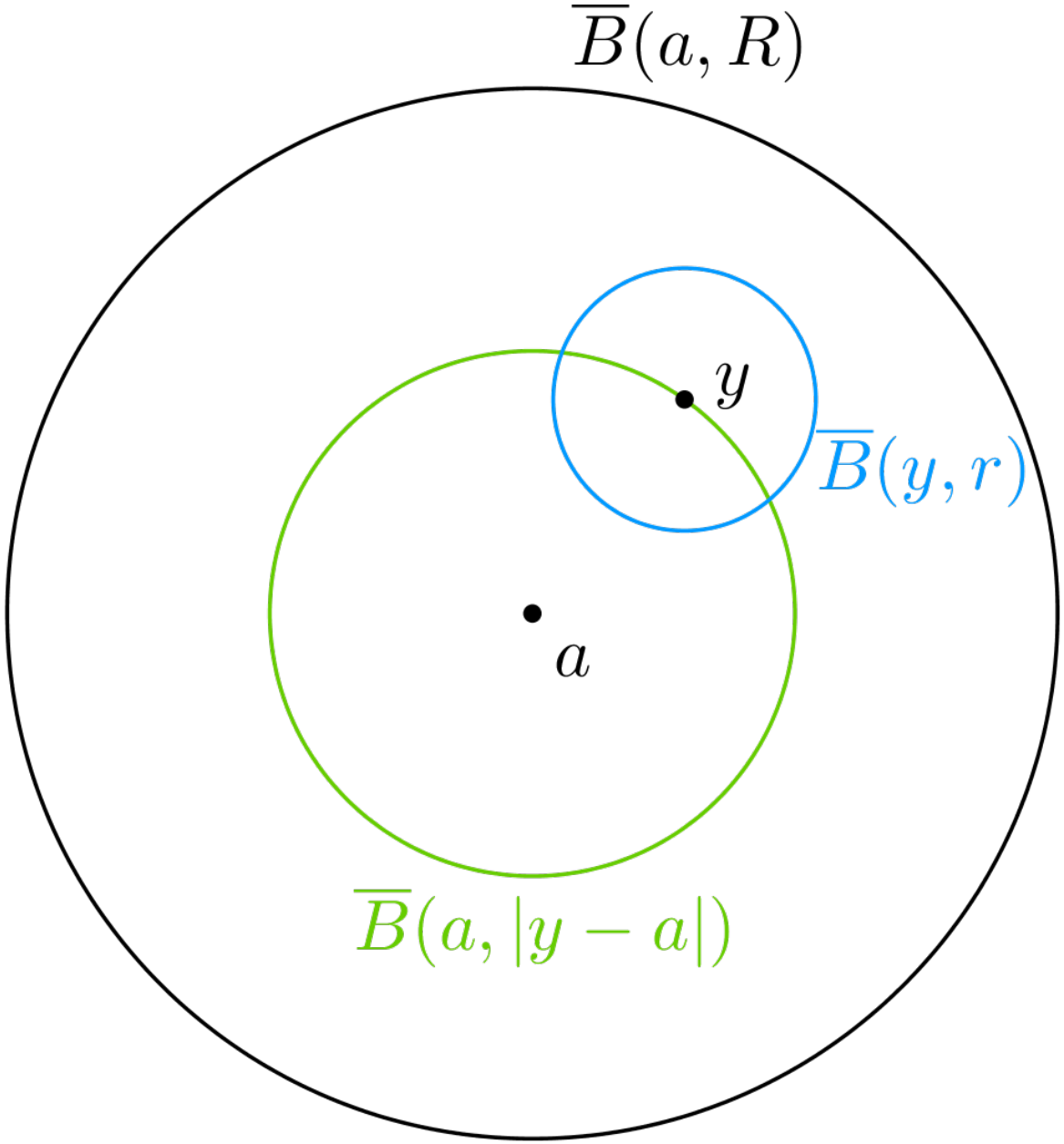
$$(v-u)(x) \leqslant (v-u)(y), \tag{2}$$

za svako $x \in \partial B(y, r)$.

Osim toga, na osnovu izbora tačke y imamo da je

$$(v-u)(x) < (v-u)(y), \tag{3}$$

za svako $x \in \partial B(y, r) \setminus \overline{B}(a, |y-a|)$ (videti sliku na sledećem slajdu).


$\overline{B}(a, R)$
y
$\overline{B}(y, r)$
a
$\overline{B}(a, |y - a|)$

Dalje, iz (1) dobijamo

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} \Big((v-u)(y) - (v-u)(x) \Big) dS(x) = 0,$$

a to je nemoguće jer je podintegralna funkcija na osnovu (2) nenegativna na $\partial B(y,r)$, a na osnovu (3) pozitivna na $\partial B(y,r) \setminus \overline{B}(a,|y-a|)$.

Dakle, pretpostavka da je funkcija $v-u$ pozitivna u nekoj tački iz $\overline{B}(a,R)$ nije tačna.

Sledi da je $(v-u)(x) \leqslant 0$ za svako $x \in \overline{B}(a,R)$.

Slično se dokazuje da je $(v-u)(x) \geqslant 0$ za svako $x \in \overline{B}(a,R)$.

Konačno, dokazali smo da je $v(x) = u(x)$ za svako $x \in B(a,R)$.

Pretpostavka teoreme 1 da je funkcija u neprekidna je esencijalna, tj. ne može se izostaviti.

Na primer, neka je funkcija $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(x,y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ -1, & y < 0. \end{cases}$$

Tada za svako $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ postoji niz r_j pozitivnih realnih brojeva takav da je $\lim_{j\to\infty} r_j = 0$ i za svako j važi

$$u(a) = \frac{1}{2\pi r_j} \int_{\partial B(a,r_j)} u(\zeta) ds(\zeta).$$

Proveriti to za domaći zadatak.

Međutim funkcija u nije harmonijska na $\mathbb{R}^2$.

Egzistencija rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na Žordanovoj oblasti

Postoji tesna veza između harmonijskih funkcija definisanih na oblastima u ravni i holomorfnih funkcija. Stoga, za Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na oblastima u ravni moguće je dobiti neke nove interesantne rezultate.

Neka je $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ograničena prosto povezana oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ takva da je $\partial\Omega$ homeomorfna sa $\partial\mathbb{D}$ naziva se *Žordanova oblast*.

Dakle, Žordanova oblast jeste oblast u ravni.

Na primer,

- disk, kružni isečak, unutrašnja oblast mnogougla, ... jesu Žordanove oblasti;
- kružni prsten, probušeni disk, poluravan, $\mathbb{D} \setminus \big([0,1) \times \{0\}\big)$, ... nisu Žordanove oblasti.

Teorema 2

Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na Žordanovoj oblasti ima jedinstveno rešenje.

Dakle, ako je Ω Žordanova oblast i $g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$ data funkcija onda postoji jedinstvena funkcija $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ takva da važi

1° $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$;

2° $\Delta u(z) = 0$, za svako $z \in \Omega$;

3° $u(z) = g(z)$, za svako $z \in \partial\Omega$.

Kako bismo dokazali ovu teoremu podsetićemo se nekih teorema iz kompleksne analize.

Teorema 3 (Rimanova teorema)

Neka je $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ prosto povezana oblast. Tada postoji funkcija $\phi : \Omega \to \mathbb{D}$ sa sledećim svojstvima:

i) *ϕ je bijekcija;*

ii) *ϕ i ϕ^{-1} su holomorfne.*

Pretpostavka da je $\Omega \neq \mathbb{C}$ u formulaciji Rimanove teoreme je esencijalna tj. ne može da se izostavi. Za domaći zadatak pokazati zašto.

Preslikavanje ϕ čiju egzistenciju utvrđuje Rimanova teorema naziva se *Rimanovo preslikavanje.*

Teorema 4 (Karateodorijeva teorema)

Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ *Žordanova oblast i neka je* $\phi : \Omega \to \mathbb{D}$ *Rimanovo preslikavanje. Tada postoji funkcija* $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ *sa sledećim svojstvima:*

i) $\Phi(z) = \phi(z)$, *za svako* $z \in \Omega$;

ii) Φ *je bijekcija;*

iii) Φ *i* Φ^{-1} *su neprekidne.*

Teorema 5 (O kompoziciji harmonijske i holomorfne funkcije)

Neka su $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ *otvoreni skupovi i neka su* $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ *holomorfna funkcija na* Ω_1 *i* $u : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *harmonijska funkcija na* Ω_2. *Tada je* $u \circ g : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ *harmonijska funkcija na* Ω_1.

Dokaz. Neka je $a \in \Omega_1$ fiksirano. Dovoljno je da dokažemo da postoji $r > 0$ takvo da je funkcija $u \circ g$ harmonijska na $B(a, r)$.

Neka je $b = g(a)$.

Kako je Ω_2 otvoren skup, sledi da postoji $R > 0$ takvo da je $B(b, R) \subset \Omega_2$.

Dalje, kako je $B(b, R)$ prosto povezana oblast, sledi da postoji holomorfna funkcija $f : B(b, R) \to \mathbb{C}$ takva da je $\operatorname{Re} f = u$.

S druge strane, kako je g neprekidna funkcija, sledi da je $g^{-1}(B(b, R))$ otvoren skup koji sadrži tačku a. Otuda postoji $r > 0$ takvo da je $B(a, r) \subset g^{-1}(B(b, R))$, tj. $g(B(a, r)) \subset B(b, R)$.

Dakle, funkcija $f \circ g$ je holomorfna na $B(a, r)$.

Stoga je funkcija $\operatorname{Re}(f \circ g) = (\operatorname{Re} f) \circ g = u \circ g$ harmonijska na $B(a, r)$.

Dokaz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na Žordanovoj oblasti.

Kako je Ω ograničena oblast, sledi da dati problem može imati najviše jedno rešenje.

Neka je $\Phi : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{D}}$ preslikavanje čiji egzistenciju utvrđuje Karateodorijeva teorema.

Dalje, neka je funkcija $h : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definisana sa $h(\zeta) = (g \circ \Phi^{-1})(\zeta)$.

Funkcija h je neprekidna na $\partial\mathbb{D}$ i postoji jedinstvena funkcija $v : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ takva da je

1.1° $v \in C^2(\mathbb{D}; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{R})$;

1.2° $\Delta v(\zeta) = 0$, za svako $\zeta \in \mathbb{D}$;

1.3° $v(\zeta) = h(\zeta)$, za svako $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

Neka je $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definisana sa $u(z) = (v \circ \Phi)(z)$.

I. Kako su Φ i v neprekidne, odnosno dvaput neprekidno diferencijabilne na odgovarajućim domenima sledi da je $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

II. Kako je Φ holomorfna na Ω i v harmonijska na $\mathbb{D}$, sledi da je u harmonijska na Ω.

III. Za $z \in \partial\Omega$ važi

$$\begin{aligned} u(z) &= (v \circ \Phi)(z) \\ &= (h \circ \Phi)(z) \\ &= ((g \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi)(z) \\ &= g(z). \end{aligned}$$