

9. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 7. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Razmatramo Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na jediničnoj lopti $\mathbb{B}$.

Pokazali smo da za funkciju u koja je harmonijska na $\overline{\mathbb{B}}$ (a to znači da je harmonijska na $B(0, R)$, za neko $R > 1$) i svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$(1) \quad u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) u(y) dS(y),$$

pri čemu je $\mathcal{P} : \mathbb{B} \times \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n}.$$

Na taj način definisana funkcija $\mathcal{P}$ naziva se Puasonovo jezgro za $\mathbb{B}$.

Svojstva Puasonovog jezgra za $\mathbb{B}$

Neka je $y \in \partial\mathbb{B}$ fiksirano i neka je $p_{[y]} : \mathbb{R}^n \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $p_{[y]}(x) = \mathcal{P}(x, y)$. Uobičajeno je da se funkcija $p_{[y]}$ obeležava sa $\mathcal{P}(\cdot, y)$.

Stav 1

Neka je $y \in \partial\mathbb{B}$ fiksirano. Funkcija $\mathcal{P}(\cdot, y)$ je beskonačno puta neprekidno diferencijabilna i harmonijska na $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

Kako bismo dokazali ovaj stav najpre ćemo formulisati jednu lemu.

Lema 1 (Laplasijan proizvoda)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka su $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Tada je

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle + v\Delta u.$$

Dokaz leme je pravolinijski. Uraditi ga za domaći zadatak.

Dokaz stava. Definišimo funkcije $U, V : \mathbb{R}^n \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$U(x) = 1 - |x|^2 \quad \text{i} \quad V(x) = |x - y|^{-n}.$$

Važi $\mathcal{P}(\cdot, y) = UV$.

Otuda neposredno sledi da je $\mathcal{P}(\cdot, y)$ beskonačno puta neprekidno diferencijabilna na $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

Dalje, na osnovu leme sledi

$$\begin{aligned} (2) \quad \Delta \mathcal{P}(\cdot, y) &= \Delta(UV) \\ &= U\Delta V + 2\langle \nabla U, \nabla V \rangle + V\Delta U. \end{aligned}$$

Uobičajeno je i da se $(\Delta \mathcal{P}(\cdot, y))(x)$, gde je $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, obeležava sa $\Delta_x \mathcal{P}(x, y)$.

Neposredno se izračunava da za $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ važi

$$\Delta U(x) = -2n,$$

$$\Delta V(x) = 2n|x - y|^{-n-2},$$

$$\nabla U(x) = -2x,$$

i

$$\nabla V(x) = -n|x - y|^{-n-2}(x - y).$$

Otuda, na osnovu (2) dobijamo da za $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ važi

$$\begin{aligned}\Delta_x \mathcal{P}(x, y) &= (\Delta \mathcal{P}(\cdot, y))(x) \\ &= \frac{-|x - y|^2 + |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + 1}{|x - y|^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

U dokazu ove jednakosti treba uzeti u obzir da je $|y| = 1$.

Stav 2

Puasonovo jezgro za loptu $\mathbb{B}$ (tj. funkcija $\mathcal{P}$) ima sledeća svojstva:

- a) *za svako $(x, y) \in \mathbb{B} \times \partial\mathbb{B}$ važi $\mathcal{P}(x, y) > 0$;*
- b) *za svako $x \in \mathbb{B}$ važi $\int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) dS(y) = n\omega_n$;*
- c) *za svako $\eta \in \partial\mathbb{B}$ i svako $\delta > 0$ važi*

$$\lim_{\mathbb{B} \ni x \rightarrow \eta} \int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y) = 0,$$

gde je $A(\eta, \delta) = \{y \in \partial\mathbb{B} : |y - \eta| \geq \delta\}$.

Dokaz.

a) Neposredno sledi iz definicije funkcije $\mathcal{P}$.

b) Neka je $x \in \mathbb{B}$ i neka je funkcija $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u(y) = 1$. Tada na osnovu (1) dobijamo

$$1 = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) dS(y),$$

što je i trebalo dokazati.

c) Fiksirajmo $\eta \in \partial\mathbb{B}$ i $\delta > 0$. Kako $x \rightarrow \eta$ možemo pretpostaviti da je $|x - \eta| < \frac{\delta}{2}$.

Dalje, za svako $y \in A(\eta, \delta)$ važi

$$\begin{aligned} |y - x| &= |y - \eta + \eta - x| \\ &\geq \left| |y - \eta| - |\eta - x| \right| \\ &\geq |y - \eta| - |\eta - x| \\ &> \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y) \\ &= \int_{A(\eta, \delta)} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} dS(y) \\ &\leq \int_{A(\eta, \delta)} (1 - |x|^2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} dS(y) \\ (3) \quad &= (1 - |x|^2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} \int_{A(\eta, \delta)} dS(y) \\ &\leq (1 - |x|^2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} \int_{\partial \mathbb{B}} dS(y) \\ &= (1 - |x|^2) \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} n\omega_n. \end{aligned}$$

Konačno, uzimajući u obzir da je $|\eta| = 1$, iz (3) dobijamo

$$\lim_{\mathbb{B} \ni x \rightarrow \eta} \int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y) = 0.$$

Egzistencija rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti

Vratimo se na Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na lopti.

Pretpostavimo da je funkcija $g : \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ restrikcija harmonijske funkcije $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Tada je funkcija u rešenje odgovarajućeg Dirihleovog problema i osim toga za svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} g(y) dS(y).$$

Šta ako funkcija g nije restrikcija neke harmonijske funkcije $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$, odnosno šta ako to ne možemo jednostavno utvrditi?

Neka je sada $g : \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna neprekidna funkcija na $\partial\mathbb{B}$.

Motivisani prethodnim razmatranjem definišimo funkciju $P[g] : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ na sledeći način

$$P[g](x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) g(y) dS(y).$$

Funkcija $P[g]$ naziva se Puasonovo produženje funkcije g na $\mathbb{B}$.

Važi sledeća teorema.

Teorema 1 (Egzistencija rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti $\mathbb{B}$)

Funkcija $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(x) = \begin{cases} P[g](x), & x \in \mathbb{B}, \\ g(x), & x \in \partial\mathbb{B}, \end{cases}$$

jeste rešenje odgovarajućeg Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti $\mathbb{B}$.

Dakle, funkcija u ima sledeća svojstva:

- 1° $u \in C(\overline{\mathbb{B}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{B}; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{B}$;
- 3° $u(x) = g(x)$ za svako $x \in \partial\mathbb{B}$.

Pre nego što damo dokaz teoreme uvedimo jednu notaciju za parcijalne izvode funkcije više promenljivih.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

Dalje, neka je $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Tada je

$$D^\alpha \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Specijalno, ako je $\alpha = (0, \dots, 0)$ onda je

$$D^\alpha \varphi = \varphi.$$

Na primer, ako je $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ funkcija promenljive (x, y) onda je

$$\begin{aligned}D^{(1,0)}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\D^{(0,1)}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\D^{(1,1)}\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \\D^{(2,0)}\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2x}, \\&\dots\end{aligned}$$

Slično, ako je $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ funkcija promenljive (x, y, z) onda je

$$\begin{aligned}D^{(1,1,0)}\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \\D^{(0,1,2)}\varphi &= \frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial z^2}, \\&\dots\end{aligned}$$

Dokaz teoreme.

I. Dokažimo da je $u \in C^2(\mathbb{B}; \mathbb{R})$.

Podsetimo se da za svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$(4) \quad u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y)g(y)dS(y).$$

Osim toga,

- 1) za svako $y \in \partial\mathbb{B}$ važi $\mathcal{P}(\cdot, y) \in C^\infty(\mathbb{B}; \mathbb{R})$;
- 2) za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ važi $D_x^\alpha \mathcal{P} \in C(\mathbb{B} \times \partial\mathbb{B}; \mathbb{R})$, a samim tim i $(D_x^\alpha \mathcal{P}) \cdot g \in C(\mathbb{B} \times \partial\mathbb{B}; \mathbb{R})$ (sa $D_x^\alpha \mathcal{P}$ obeležavamo odgovarajuće diferenciranje po promenljivoj x).

Otuda, ako najpre površinski integral s desne strane jednakosti (4) napišemo kao odgovarajući $(n - 1)$ -tostruki (zapreminski) integral, a zatim primenimo odgovarajuće teoreme za parametarske integrale (x je parametar) dobijamo da

$$u \in C^\infty(\mathbb{B}; \mathbb{R}) \subsetneq C^2(\mathbb{B}; \mathbb{R}).$$

Uz to za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$(5) \quad D^\alpha u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} (D_x^\alpha \mathcal{P})(x, y) g(y) dS(y).$$

II. Dokažimo da je $u \in C(\overline{\mathbb{B}}; \mathbb{R})$.

Na osnovu **I** dovoljno je da dokažemo da je funkcija u neprekidna u proizvoljnoj tački koja pripada $\partial\mathbb{B}$.

Fiksirajmo $\eta \in \partial\mathbb{B}$ i dokažimo da je

$$\lim_{\overline{\mathbb{B}} \ni x \rightarrow \eta} u(x) = u(\eta).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $x \in \mathbb{B}$ važi

$$\begin{aligned}
 |u(x) - u(\eta)| &= \left| \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, \cdot) g dS - g(\eta) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, \cdot) g dS - g(\eta) \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, \cdot) dS \right| \\
 &= \frac{1}{n\omega_n} \left| \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) (g(y) - g(\eta)) dS(y) \right| \\
 &\leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) |g(y) - g(\eta)| dS(y).
 \end{aligned}$$

Kako je funkcija g neprekidna na $\partial\mathbb{B}$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $y \in \partial\mathbb{B}$ iz $|y - \eta| < \delta$ sledi $|g(y) - g(\eta)| < \varepsilon$. Stoga je

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) |g(y) - g(\eta)| dS(y) &= \int_{\partial\mathbb{B} \setminus A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) |g(y) - g(\eta)| dS(y) \\
 &\quad + \int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) |g(y) - g(\eta)| dS(y) \\
 &\leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{B} \setminus A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y) \\
 &\quad + 2 \max_{\partial\mathbb{B}} |g| \int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y) \\
 &\leq \varepsilon n \omega_n + 2 \max_{\partial\mathbb{B}} |g| \int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y).
 \end{aligned}$$

Dalje, na osnovu dela c) stava 2 postoji $\mu_1 > 0$ tako da za svako $x \in \mathbb{B}$ iz $|x - \eta| < \mu_1$ sledi

$$\int_{A(\eta, \delta)} \mathcal{P}(x, y) dS(y) < \varepsilon n \omega_n.$$

Dakle, na osnovu prethodnog, za svako $x \in \mathbb{B}$ takvo da je $|x - \eta| < \mu_1$ važi

$$\begin{aligned} |u(x) - u(\eta)| &< 2(\max_{\partial \mathbb{B}} |g|)\varepsilon + \varepsilon \\ &= (2\max_{\partial \mathbb{B}} |g| + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Primetimo još sledeće. Kako je funkcija g neprekidna na $\partial\mathbb{B}$, sledi da postoji $\mu_2 > 0$ tako da za svako $x \in \partial\mathbb{B}$ iz $|x - \eta| < \mu_2$ sledi

$$|u(x) - u(\eta)| = |g(x) - g(\eta)| < \varepsilon.$$

Konačno, za svako $x \in \overline{\mathbb{B}}$ takvo da je $|x - \eta| < \min\{\mu_1, \mu_2\}$ važi

$$|u(x) - u(\eta)| < (2 \max_{\partial\mathbb{B}} |g| + 1)\varepsilon.$$

III. Dokažimo da je $\Delta u(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{B}$.

Na osnovu **I** i stava 1 imamo da za svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \Delta_x \mathcal{P}(x, y) g(y) dS(y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

IV. Dokažimo da za svako $x \in \partial\mathbb{B}$ važi $u(x) = g(x)$.

To sledi iz definicije funkcije u .

Navedimo jednu posledicu dokaza teoreme 1 i jedinstvenosti rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na $\mathbb{B}$.

Posledica 1

Ako je funkcija $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na jediničnoj lopti $\mathbb{B}$ onda $u \in C^\infty(\mathbb{B}; \mathbb{R})$.

Zadatak 1

Neka je $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Rešiti problem (odrediti rešenje koje pripada $C(\overline{\mathbb{D}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{D}; \mathbb{R})$ i dokazati da je jedinstveno):

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{D},$$

$$u(x, y) = y^2, \quad (x, y) \in \partial\mathbb{D}.$$

Rešenje. Primitimo da je $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$.

Kako je $\mathbb{D}$ ograničena oblast, dati problem može imati najviše jedno rešenje.

Kako je $n = 2$, na osnovu teoreme 1 dobijamo da je rešenje datog problema funkcija $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} (\operatorname{Im} \zeta)^2 ds(\zeta), & z \in \mathbb{D} \\ (\operatorname{Im} z)^2, & z \in \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Odnosno, drugačije zapisano

$$(6) \quad u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \eta^2 ds(\xi, \eta), & (x, y) \in \mathbb{D} \\ y^2, & (x, y) \in \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Napomenimo da u slučaju $n = 2$ umesto površinskog integrala prve vrste imamo krivolinijski integral prve vrste, kao i da umesto dS pišemo ds .

Uzimajući u obzir da je $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \partial\mathbb{D}$ definisano sa $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ parametrizacija $\partial\mathbb{D}$ iz (6) dobijamo da za $(x, y) \in \mathbb{D}$ važi

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2} \sin^2 t dt.$$

Potrebno je eksplicitno izračunati poslednji integral ...

Može se pokazati (uraditi to za domaći zadatak) da je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2} \sin^2 t dt = \dots = \frac{1}{2}(1 + y^2 - x^2).$$

Konačno, možemo zaključiti da je funkcija $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(1 + y^2 - x^2),$$

rešenje datog problema.

Zadatak 2

Neka je $a \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Dokazati da Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na lopti $B = B(a, r)$ ima tačno jedno rešenje.

Treba da dokažemo da za datu funkciju $g \in C(\partial B; \mathbb{R})$ postoji jedinstvena funkcija $u : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

- 1° $u \in C^2(B; \mathbb{R}) \cap C(\overline{B}; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x) = 0$ za svako $x \in B$;
- 3° $u(x) = g(x)$ za svako $x \in \partial B$.

Kako je B ograničena oblast, sledi da ovaj problem ima najviše jedno rešenje.

Dokažimo sada da rešenje problema postoji.

Neka je $G : \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $G(x) = g(rx + a)$.

Jasno je da $G \in C(\partial\mathbb{B}; \mathbb{R})$.

Dalje, neka je $U : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na $\mathbb{B}$, pri čemu je odgovarajuća funkcija na $\partial\mathbb{B}$ upravo funkcija G .

Definišimo funkciju $u : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ sa $u(x) = U\left(\frac{x-a}{r}\right)$.

Neposredno se proverava da je funkcija u rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti $B = B(a, r)$.

Zadatak 3

*Neka je funkcija $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $\overline{\mathbb{B}}$ i harmonijska na $\mathbb{B}$.
Dokazati da za svako $x \in \mathbb{B}$ važi*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) u(y) dS(y).$$

Dokaz sledi iz egzistencije i jedinstvenosti rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti $\mathbb{B}$.

Uporediti pretpostavku za funkciju u u ovom zadatku i pretpostavku za funkciju u prilikom uvođenja Puasonovog jezgra.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup. Ako je funkcija $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska na Ω onda po definiciji sledi da je $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Međutim sledeća teorema tvrdi da važi više.

Teorema 2

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup. Ako je funkcija $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska na Ω onda je $u \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

Dokaz. Neka je $a \in \Omega$ proizvoljno, neka je $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ i neka je $U : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $U(x) = u(rx + a)$.

Tada je funkcija U neprekidna na $\overline{\mathbb{B}}$ i harmonijska na $\mathbb{B}$.

Dakle, funkcija U je jedinstveno rešenje odgovarajućeg Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na $\mathbb{B}$ (funkcija $g : \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana je sa $g(x) = U(x)$).

Dakle, $U \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}; \mathbb{R})$, a samim tim i $u \in C^\infty(B(a, r); \mathbb{R})$.