

8. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 2. novembar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Zadatak 1

Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast, neka su $u_1, u_2 : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije koje su neprekidne na $\overline{D}$ i harmonijske na D i neka je $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u(x) = |u_1(x)| + |u_2(x)|$. Dokazati da važi

$$\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

Neka je $x_{\max} \in \overline{D}$ jedna od tačaka u kojoj funkcija u dostiže maksimum.

Dalje, neka je za $j \in \{1, 2\}$,

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je } u_j(x_{\max}) \geq 0, \\ -1, & \text{ako je } u_j(x_{\max}) < 0, \end{cases}$$

Funkciju $\tilde{u} : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definišemo na sledeći način:

$$\tilde{u}(x) = \varepsilon_1 u_1(x) + \varepsilon_2 u_2(x).$$

Neposredno se proverava da je funkcija $\tilde{u}$ neprekidna na $\overline{D}$ i harmonijska na D .

Neka je $x \in \overline{D}$ proizvoljno. Tada je

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= \varepsilon_1 u_1(x) + \varepsilon_2 u_2(x) \\ &\leq |u_1(x)| + |u_2(x)| \\ &= u(x) \\ &\leq u(x_{\max}) \\ &= |u_1(x_{\max})| + |u_2(x_{\max})| \\ &= \varepsilon_1 u_1(x_{\max}) + \varepsilon_2 u_2(x_{\max}) \\ &= \tilde{u}(x_{\max}).\end{aligned}$$

Dakle, funkcija $\tilde{u}$ takođe dostiže maksimum u tački $x_{\max}$.

Ako $\tilde{u}$ nije konstantna funkcija, onda $x_{\max} \in \partial D$ (zašto ?), pa je

$$\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

Ako je $\tilde{u}$ konstantna funkcija, onda za svako $x \in \overline{D}$ važi

$$\tilde{u}(x_{\max}) = \tilde{u}(x) \leq |u_1(x)| + |u_2(x)| = u(x) \leq \tilde{u}(x_{\max}).$$

Otuda sledi da je u konstantna funkcija, pa je

$$\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

Zadatak 2

Neka je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Odrediti sve harmonijske funkcije $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$|u(x, y)| \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

za svako $(x, y) \in D$.

Neka je $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna harmonijska funkcija na D takva da važi

$$|u(x, y)| \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

za svako $(x, y) \in D$.

Primetimo najpre da za svako $(x_0, y_0) \in \partial D$ važi

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |u(x, y)| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

Dalje, neka je $v : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$v(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & \text{ako } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{ako } (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

Na osnovu prethodnog sledi da je v neprekidna na $\overline{D}$ i harmonijska na D .

Otuda na osnovu teoreme 7 sa prethodnog časa sledi da je $\max_{\overline{D}} v = \min_{\overline{D}} v = 0$. Otuda je $v(x, y) = 0$, za svako $(x, y) \in \overline{D}$, a samim tim i $u(x, y) = 0$ za svako $(x, y) \in D$.

Zadatak 3

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast i neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ harmonijska funkcija. Ako funkcija $|f|$ ima maksimum na Ω onda je f konstantna funkcija.

Neka je $a \in \Omega$ tačka u kojoj funkcija $|f|$ dostiže maksimum.

Ako je $f(a) = 0$ rešenje je trivijalno.

Stoga pretpostavimo da je $f(a) \neq 0$.

Neka je $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa $g(x) = e^{-i \arg f(a)} f(x)$.

Tada je funkcija g kompleksno-vrednosna harmonijska funkcija i važi

$$g(a) = e^{-i \arg f(a)} f(a) = |f(a)|.$$

Dalje, funkcija $\operatorname{Re} g$ je harmonijska na Ω i za svako $x \in \Omega$ važi

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g(x) &\leq |g(x)| \\ &= |f(x)| \\ &\leq |f(a)| \\ &= g(a) \\ &= \operatorname{Re} g(a). \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu teoreme 5 sa prethodnog časa funkcija $\operatorname{Re} g$ je konstantna na Ω .

Štaviše, za svako $x \in \Omega$ važi $\operatorname{Re} g(x) = |f(a)|$.

Dokažimo još da je i funkcija $\operatorname{Im} g$ konstantna na Ω .

Primetimo da za svako $x \in \Omega$ važi

$$\begin{aligned} |f(a)| &= \operatorname{Re} g(x) \\ &\leq |g(x)| \\ &= |f(x)| \\ &\leq |f(a)|. \end{aligned}$$

Dakle, za svako $x \in \Omega$ važi $\operatorname{Re} g(x) = |g(x)|$.

Stoga za svako $x \in \Omega$ važi $\operatorname{Im} g(x) = 0$.

Konačno, za svako $x \in \Omega$ važi $g(x) = |f(a)|$, a kako je $g = e^{-i \arg f(a)} f$, sledi da za svako $x \in \Omega$ važi

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{i \arg f(a)} g(x) \\ &= e^{i \arg f(a)} |f(a)| \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na lopti

Nastavljamo sa razmatranjem Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti.

Pre nego što se podsetimo formulacije tog problema, uvedimo neke oznake koje ćemo koristiti u nastavku.

Neka je $n \geq 2$ prirodan broj i neka su $a \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Uvodimo sledeće oznake

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\},$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \leq r\}$$

i

$$S(a, r) = \partial B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}.$$

Specijalno, $\mathbb{B} = B(0, 1)$, $\overline{\mathbb{B}} = \overline{B}(0, 1)$ i $\mathbb{S} = \partial \mathbb{B} = S(0, 1)$.

Neka je $g \in C(\partial\mathbb{B}; \mathbb{R})$ data funkcija. Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na lopti $\mathbb{B}$ odnosi se na određivanje funkcije $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

- 1° $u \in C(\overline{\mathbb{B}}; \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{B}; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x) = 0$ za svako $x \in \mathbb{B}$;
- 3° $u(x) = g(x)$ za svako $x \in \partial\mathbb{B}$.

Kako je $\mathbb{B}$ ograničena oblast, ovaj problem može imati najviše jedno rešenje.

Kako odrediti to rešenje, ako ono postoji?

Potrebno je na osnovu vrednosti funkcije na $\partial\mathbb{B}$ odrediti njene vrednosti na $\mathbb{B}$ uz uslov da funkcija bude harmonijska na $\mathbb{B}$ i neprekidna na $\overline{\mathbb{B}}$.

Kako to uraditi?

Napomenimo da ako je funkcija neprekidna na $\mathbb{B}$ i neprekidna na $\partial\mathbb{B}$ ne mora da znači da je neprekidna i na $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \cup \partial\mathbb{B}$!

Pretpostavimo da je $u : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija.

Kako $\overline{\mathbb{B}}$ nije otvoren skup, postavlja se pitanje šta znači da je funkcija u harmonijska na $\overline{\mathbb{B}}$? To znači da postoji otvoren skup Ω takav da je $\overline{\mathbb{B}} \subset \Omega$ i da je funkcija u harmonijska na Ω . Specijalno, postoji $R > 1$ takvo da je funkcija u harmonijska na $B(0, R)$.

Na osnovu svojstva srednje vrednosti imamo da važi

$$u(0) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} u(y) dS(y).$$

Dakle, vrednost funkcije u u centru lopte $\mathbb{B}$ izražena je preko njenih vrednosti na $\partial\mathbb{B}$.

Da li možemo vrednost funkcije u u proizvoljnoj tački iz $\mathbb{B}$ izraziti preko njenih vrednosti na $\partial\mathbb{B}$?

Bilo bi lepo i korisno da to možemo uraditi.

Pokazaćemo da postoji funkcija $\mathcal{P} : \mathbb{B} \times \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \mathcal{P}(x, y) u(y) dS(y),$$

za svaku funkciju u koja je harmonijska na $\overline{\mathbb{B}}$ i svako $x \in \mathbb{B}$.

Primetimo da ovde radimo sa funkcijom u koja je harmonijska na $\overline{\mathbb{B}}$, dok se za rešenje Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na lopti $\mathbb{B}$ zahteva da bude harmonijska funkcija na $\mathbb{B}$ i neprekidna funkcija na $\overline{\mathbb{B}}$.

Funkciju $\mathcal{P}$ odredićemo različitim metodama u slučaju $n = 2$ i u slučaju $n \geq 3$.

Pretpostavimo da je $n = 2$.

Kako je funkcija u harmonijska na $\overline{\mathbb{B}}$, sledi da postoji $R > 1$ takvo da je funkcija u harmonijska na $B(0, R)$.

Dalje, neka je $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na $B(0, R)$ takva da je $\operatorname{Re} f = u$ (objasniti zašto takva funkcija f postoji).

Funkciju f možemo predstaviti Tejlorovim redom u $B(0, R)$, tj. postoje $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ tako da za svako $z \in B(0, R)$ važi

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k.$$

Otuda za $z \in B(0, R)$ važi

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{c_k} \overline{z^k} \right). \end{aligned}$$

Neka je $z = re^{i\theta}$, gde je $0 \leq r < 1$ i $\theta \in \mathbb{R}$. Iz poslednje jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{c_k} r^k e^{-ik\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k e^{ik\theta} + \sum_{l=-\infty}^0 \overline{c_{-l}} r^{-l} e^{il\theta} \right). \end{aligned}$$

Otuda je

$$(1) \quad u(re^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m r^{|m|} e^{im\theta},$$

gde je

$$C_m = \begin{cases} \frac{c_m}{2}, & m > 0, \\ \frac{\overline{c_{-m}}}{2}, & m < 0, \\ \frac{c_0 + \overline{c_0}}{2}, & m = 0. \end{cases}$$

Specijalno,

$$(2) \quad u(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{im\theta}.$$

Množenjem leve i desne strane jednakosti (2) sa $e^{-ik\theta}$ ($k \in \mathbb{Z}$), a zatim integraljenem po θ od 0 do 2π dobijamo

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i(m-k)\theta} \right) d\theta.$$

Kako red $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i(m-k)\theta}$ ravnomerno konvergira (po θ) na $\mathbb{R}$ (objasniti zašto), sledi da je

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i(m-k)\theta} \right) d\theta = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \int_0^{2\pi} e^{i(m-k)\theta} d\theta \\ = C_k \cdot 2\pi.$$

Stoga iz (3) i (4) dobijamo

$$(5) \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$

Zamenom (5) u (1) dobijamo

$$(6) \quad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} u(e^{it}) e^{-imt} dt \right) r^{|m|} e^{im\theta}.$$

Dalje važi

$$(7) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} u(e^{it}) e^{-ikt} dt \right) r^{|m|} e^{im\theta} = \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^{|m|} e^{im(\theta-t)} dt,$$

jer red $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^{|m|} e^{im(\theta-t)}$ ravnomerno konvergira (po t) na $\mathbb{R}$ (objasniti zašto).

Stoga, iz (6) i (7) sledi

$$(8) \quad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^{|m|} e^{im(\theta-t)} dt.$$

Odredimo sada sumu reda $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^{|m|} e^{im(\theta-t)}$.

Važi

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^{|m|} e^{im(\theta-t)} &= \sum_{m=0}^{+\infty} r^m e^{im(\theta-t)} + \sum_{m=-\infty}^{-1} r^{-m} e^{im(\theta-t)} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} r^m e^{im(\theta-t)} + \sum_{k=1}^{+\infty} r^k e^{ik(t-\theta)}, \end{aligned}$$

kao i

$$\sum_{m=0}^{+\infty} r^m e^{im(\theta-t)} = \frac{1}{1 - r e^{i(\theta-t)}}$$

i

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r^k e^{ik(t-\theta)} = \frac{1}{1 - r e^{i(t-\theta)}} - 1.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^{|m|} e^{im(\theta-t)} &= \frac{1}{1 - re^{i(\theta-t)}} + \frac{1}{1 - re^{i(t-\theta)}} - 1 \\&= \frac{1 - re^{i(t-\theta)} + 1 - re^{i(\theta-t)}}{|1 - re^{i(\theta-t)}|^2} - 1 \\&= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\theta-t)}|^2} \\&= \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2}.\end{aligned}$$

Otuda, na osnovu (8) dobijamo

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} dt,$$

odnosno

$$\begin{aligned} (9) \quad u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1-|z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt \\ &= \frac{1}{2\omega_2} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} u(\zeta) ds(\zeta). \end{aligned}$$

$$\text{Konačno, } \mathcal{P}(z, \zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

Ova funkcija $\mathcal{P}$ naziva se *Puasonovo jezgro za disk* (jediničnu loptu u $\mathbb{R}^2$).

Pretpostavimo da je $n \geq 3$.

Kako bismo odredili funkciju $\mathcal{P}$ modifikovaćemo dokaz svojstva srednje vrednosti.

Neka je nadalje $x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$ fiksirana tačka.

Slično, kao kod dokaza svojstva srednje vrednosti definišimo funkciju $v : \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ sa $v(y) = |y - x|^{2-n}$.

Jasno je da je funkcija v harmonijska na $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, a samim tim i na $\overline{\mathbb{B}} \setminus \{x\}$ (proveriti to za domaći zadatak).

Nažalost, funkcija v nije konstantna na $\partial\mathbb{B}$.

Potrebno je da modifikujemo funkciju v . Za te namene (ali i neke druge) korisna će biti sledeća lema.

Lema 1 (Lema simetrije)

Za svako $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ važi

$$(10) \quad \left| \frac{y}{|y|} - |y|x \right| = \left| \frac{x}{|x|} - |x|y \right|.$$

Dokaz leme. Primitimo da važi

$$(11) \quad \begin{aligned} \left| \frac{y}{|y|} - |y|x \right|^2 &= \left\langle \frac{y}{|y|} - |y|x, \frac{y}{|y|} - |y|x \right\rangle \\ &= 1 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2|x|^2. \end{aligned}$$

Slično,

$$(12) \quad \begin{aligned} \left| \frac{x}{|x|} - |x|y \right|^2 &= \left\langle \frac{x}{|x|} - |x|y, \frac{x}{|x|} - |x|y \right\rangle \\ &= 1 - 2\langle x, y \rangle + |x|^2|y|^2. \end{aligned}$$

Iz (11) i (12) sledi (10). Kraj dokaza leme.

Na osnovu leme simetrije dobijamo da za svako $y \in \partial\mathbb{B}$ važi

$$\begin{aligned} (13) \quad |y - x| &= \left| \frac{x}{|x|} - |x|y \right| \\ &= |x| \left| \frac{x}{|x|^2} - y \right| \end{aligned}$$

i otuda (uzimajući u obzir da je $\left| \frac{x}{|x|^2} \right| = \frac{1}{|x|} > 1$) imamo da za svako $y \in \partial\mathbb{B}$ važi

$$(14) \quad |y - x|^{2-n} = |x|^{2-n} \left| \frac{x}{|x|^2} - y \right|^{2-n}.$$

Neka je $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\mathcal{L}(y) = |y - x|^{2-n}$$

i neka je $\mathcal{R} : \mathbb{R}^n \setminus \{x|x|^{-2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa

$$\mathcal{R}(y) = |x|^{2-n} \left| \frac{x}{|x|^2} - y \right|^{2-n}.$$

Funkcija $\mathcal{L}$ je harmonijska na $\overline{\mathbb{B}} \setminus \{x\}$, a funkcija $\mathcal{R}$ je harmonijska na $\overline{\mathbb{B}}$.

Dalje, neka je funkcija $v : \overline{\mathbb{B}} \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $v = \mathcal{L} - \mathcal{R}$.

Ovako definisana funkcija v je harmonijska na $\overline{\mathbb{B}} \setminus \{x\}$, a na osnovu (14) dobijamo da za svako $y \in \partial\mathbb{B}$ važi $v(y) = 0$.

Sada izaberimo $\rho > 0$ takvo da $\overline{B}(x, \rho) \subset \mathbb{B}$ i primenimo treći Grinov identitet na oblast $\Omega = \mathbb{B} \setminus \overline{B}(x, \rho)$ i funkcije u i v .

Kako su funkcije u i v harmonijske na $\overline{\Omega}$ time dobijamo

$$(15) \quad 0 = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS,$$

pri čemu je $\nu(y)$ spoljašnji jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ u tački $y \in \partial\Omega$.

Otuda je

$$(16) \quad \int_{\partial\mathbb{B}} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\partial B(x, \rho)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS,$$

pri čemu je $\nu(y)$ spoljašnji jedinični vektor normale na $\partial\mathbb{B}$ u tački $y \in \partial\mathbb{B}$, odnosno na $\partial B(x, \rho)$ u tački $y \in \partial B(x, \rho)$.

Razmotrimo levu stranu jednakosti (16). Kako je $v(y) = 0$ za svako $y \in \partial\mathbb{B}$, sledi da je

$$\int_{\partial\mathbb{B}} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\partial\mathbb{B}} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

Odredimo $\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)$, za $y \in \partial\mathbb{B}$. Kako je $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \langle \nabla v, \nu \rangle$, sledi da je dovoljno da odredimo $\nabla v(y)$ i $\nu(y)$ za $y \in \partial\mathbb{B}$.

Jasno je da je

$$(17) \qquad \qquad \qquad \nabla v = \nabla \mathcal{L} - \nabla \mathcal{R}.$$

Diferenciranjem funkcije $\mathcal{L}$ za $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ dobijamo

$$(18) \quad \nabla \mathcal{L}(y) = (2 - n)|y - x|^{-n}(y - x),$$

a diferenciranjem funkcije $\mathcal{R}$ za $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x|x|^{-2}\}$ dobijamo

$$(19) \quad \nabla \mathcal{R}(y) = (2 - n)|x|^{2-n} \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^{-n} \left(y - \frac{x}{|x|^2} \right).$$

Specijalno, za $y \in \partial \mathbb{B}$ na osnovu (13) dobijamo

$$\nabla \mathcal{R}(y) = (2 - n)|x|^2|y - x|^{-n} \left(y - \frac{x}{|x|^2} \right)$$

i otuda na osnovu (17) dobijamo

$$\nabla v(y) = (2 - n)|y - x|^{-n}(1 - |x|^2)y.$$

Kako za $y \in \partial\mathbb{B}$ važi $\nu(y) = y$, sledi da za $y \in \partial\mathbb{B}$ važi

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \nu}(y) &= \langle (2-n)|y-x|^{-n}(1-|x|^2)y, y \rangle \\ &= (2-n)|y-x|^{-n}(1-|x|^2)|y|^2 \\ &= (2-n)|y-x|^{-n}(1-|x|^2).\end{aligned}$$

Konačno, imamo da je leva strana jednakosti (16) jednaka

$$(2-n) \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^n} u(y) dS(y).$$

Razmotrimo sada desnu stranu jednakosti (16).

Neka je $y \in \partial B(x, \rho)$. Tada je $\nu(y) = \rho^{-1}(y - x)$, a na osnovu (17) i (18) važi

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \nu}(y) &= \langle \nabla v(y), \nu(y) \rangle \\ &= \langle \nabla \mathcal{L}(y), \nu(y) \rangle - \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle \\ &= (2 - n)\rho^{-1}|y - x|^{2-n} - \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle \\ &= (2 - n)\rho^{-1}\rho^{2-n} - \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle \\ &= (2 - n)\rho^{1-n} - \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(x,\rho)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS &= \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) \left((2-n)\rho^{1-n} - \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle \right) dS(y) \\ (20) \qquad &= (2-n)\rho^{1-n} \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) dS(y) \\ &\quad - \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle dS(y). \end{aligned}$$

Na osnovu svojstva srednje vrednosti važi

$$\int_{\partial B(x,\rho)} u(y) dS(y) = n\omega_n \rho^{n-1} u(x),$$

pa iz (20) dobijamo

$$(21) \quad \int_{\partial B(x,\rho)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = (2-n)n\omega_n u(x) - \int_{\partial B(x,\rho)} u(y) \langle \nabla \mathcal{R}(y), \nu(y) \rangle dS(y).$$

Dalje, kako je $v = \mathcal{L} - \mathcal{R}$ imamo

$$\int_{\partial B(x,\rho)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{\partial B(x,\rho)} \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\partial B(x,\rho)} \mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Otuda, uzimajući u obzir da za svako $y \in \partial B(x, \rho)$ važi $\mathcal{L}(y) = \rho^{2-n}$ i činjenicu da je funkcija u harmonijska na $\overline{B}(x, \rho)$ dobijamo

$$(22) \quad \int_{\partial B(x,\rho)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = - \int_{\partial B(x,\rho)} \mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Na osnovu (21) i (22) dobijamo da je desna strana jednakosti (16) jednaka

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & (2-n)n\omega_n u(x) - \int_{\partial B(x,\rho)} u \langle \nabla \mathcal{R}, \nu \rangle dS + \int_{\partial B(x,\rho)} \mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \\
 &= (2-n)n\omega_n u(x) - \int_{\partial B(x,\rho)} \left(u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \nu} - \mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS \\
 &= (2-n)n\omega_n u(x) - \int_{\overline{B}(x,\rho)} (u \Delta \mathcal{R} - \mathcal{R} \Delta u) dy.
 \end{aligned}$$

Kako su funkcije u i $\mathcal{R}$ harmonijske na $\overline{B}(x, \rho)$ iz (23) sledi da je desna strana jednakosti (16) jednaka $(2-n)n\omega_n u(x)$.

Konačno, jednakost (16) svodi se na jednakost

$$(2 - n) \int_{\partial \mathbb{B}} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} u(y) dS(y) = (2 - n) n \omega_n u(x).$$

Dakle, za svako $x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$ važi

$$(24) \quad u(x) = \frac{1}{n \omega_n} \int_{\partial \mathbb{B}} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} u(y) dS(y).$$

Ako u (24) umesto x stavimo 0 dobijamo

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{n \omega_n} \int_{\partial \mathbb{B}} \frac{1}{|y|^n} u(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{n \omega_n} \int_{\partial \mathbb{B}} u(y) dS(y), \end{aligned}$$

što takođe jeste tačno.

Stoga, za svako $x \in \mathbb{B}$ važi

$$(25) \quad u(x) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial\mathbb{B}} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} u(y) dS(y).$$

Drugim rečima, funkcija $\mathcal{P} : \mathbb{B} \times \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana je sa

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n}.$$

Ta funkcija naziva se *Puasonovo jezgro* za $\mathbb{B}$.