

7. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 31. oktobar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

Svojstvo srednje vrednosti

Podsetimo se da holomorfne funkcije imaju svojstvo srednje vrednosti. Tj. važi sledeća teorema.

Teorema 1

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Tada za svako $a \in \Omega$ i svako $r > 0$ takvo da je $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ važi

$$f(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(a, r)} f(z) ds(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Harmonijske funkcije takođe imaju svojstvo srednje vrednosti.
Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema 2 (Svojstvo srednje vrednosti - površinska verzija)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija. Tada za svako $a \in \Omega$ i svako $r > 0$ takvo da je $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ važi

$$(1) \quad u(a) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(a, r)} u(x) dS(x).$$

Dokaz. Bez umanjenja opštosti dokažimo (1) pod pretpostavkom da je $a = 0$ i $r = 1$.

Potrebno je posebno razmotriti slučajeve $n = 2$ i $n \geq 3$.

Slučaj $n \geq 3$.

Neka je $v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $v(x) = |x|^{2-n}$.

Neposredno se proverava da je funkcija v harmonijska na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Dalje, neka je $0 < \rho < 1$ proizvoljno i neka je $P(0, \rho, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho < |x| < 1\}$.

Primenimo treći Grinov identitet na oblast $P(0, \rho, 1)$ i funkcije u i v . Kako su funkcije u i v harmonijske na $P(0, \rho, 1)$ imamo

$$(2) \quad 0 = \int_{\partial P(0, \rho, 1)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Dalje imamo

$$\nu(x) = \begin{cases} x, & \text{za } x \in \partial B(0, 1), \\ -\rho^{-1}x, & \text{za } x \in \partial B(0, \rho), \end{cases}$$

kao i $v_{x_i}(x) = (2 - n)|x|^{-n}x_i$, za $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Otuda, za $x \in \partial P(0, \rho, 1)$ važi

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = \langle \nabla v(x), \nu(x) \rangle = \begin{cases} (2-n)|x|^{2-n}, & \text{za } x \in \partial B(0, 1), \\ -(2-n)\rho^{-1}|x|^{2-n}, & \text{za } x \in \partial B(0, \rho), \end{cases}$$

tj.

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = \begin{cases} (2-n), & \text{za } x \in \partial B(0, 1), \\ -(2-n)\rho^{1-n}, & \text{za } x \in \partial B(0, \rho), \end{cases}$$

Dakle,

$$(3) \quad \int_{\partial P(0,\rho,1)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS = (2-n) \int_{\partial B(0,1)} u dS - (2-n)\rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} u dS.$$

S druge strane

$$(4) \quad \int_{\partial P(0,\rho,1)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \rho^{2-n} \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Kako je funkcija u harmonijska na $\overline{B}(0,1)$, na osnovu prvog Grinovog identiteta dobijamo

$$(5) \quad \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0 \quad \text{i} \quad \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0.$$

Iz (4) i (5) dobijamo

$$(6) \quad \int_{\partial P(0,\rho,1)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0.$$

Konačno, iz (2), (3) i (6) dobijamo

$$\int_{\partial B(0,1)} u dS = \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} u dS.$$

Pokažimo još da je

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} u dS = u(0)n\omega_n.$$

To ćemo uraditi tako što ćemo pokazati da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da važi: Ako je $0 < \rho < \delta$ onda je

$$\left| \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} u dS - u(0)n\omega_n \right| < \varepsilon.$$

Dakle, neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno.

Primetimo da je

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} dS = \rho^{1-n} n\omega_n \rho^{n-1} = n\omega_n.$$

Otuda je

$$\left| \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} u dS - u(0)n\omega_n \right| = \left| \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} (u(x) - u(0)) dS(x) \right|.$$

Dalje, važi

$$\begin{aligned} \left| \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} (u(x) - u(0)) dS(x) \right| &\leq \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} |u(x) - u(0)| dS(x) \\ (7) \qquad \qquad \qquad &\leq \rho^{1-n} \max_{x \in \partial B(0,\rho)} |u(x) - u(0)| \int_{\partial B(0,\rho)} dS \\ &= n\omega_n \max_{x \in \partial B(0,\rho)} |u(x) - u(0)|. \end{aligned}$$

Zbog neprekidnosti funkcije u važi

$$(8) \quad \max_{x \in \partial B(0, \rho)} |u(x) - u(0)| = |u(\xi(\rho)) - u(0)|,$$

za neko $\xi(\rho) \in \partial B(0, \rho)$.

Osim toga, takođe zbog neprekidnosti funkcije u postoji $\delta > 0$ takvo da iz $|x| < \delta$ sledi

$$(9) \quad |u(x) - u(0)| < \varepsilon.$$

Dakle, iz (8) i (9) sledi da za svako $0 < \rho < \delta$ važi

$$(10) \quad \max_{x \in \partial B(0, \rho)} |u(x) - u(0)| < \varepsilon.$$

Konačno, iz (7) i (10) dobijamo da je

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,\rho)} u dS = u(0)n\omega_n.$$

Slučaj $n = 2$.

Ovaj slučaj razmatra se analogno kao slučaj $n \geq 3$, s tim što je funkcija $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $v(x) = \log |x|$.

Uraditi to za domaći zadatak.

Teorema 3 (Svojstvo srednje vrednosti - zapreminska verzija)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija. Tada za svako $a \in \Omega$ i svako $r > 0$ takvo da je $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ važi

$$(11) \quad u(a) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(a, r)} u(x) dx.$$

Dokaz. Neka je $0 < \rho < r$. Na osnovu teoreme 2 važi

$$(12) \quad u(a) = \frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}} \int_{\partial B(a,\rho)} u(x)dS(x).$$

Množenjem jednakosti (12) sa ρ^{n-1} i integraljenjem po ρ od 0 do r dobijamo

$$\int_0^r u(a)\rho^{n-1}d\rho = \frac{1}{n\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B(a,\rho)} u(x)dS(x) \right) d\rho,$$

odnosno

$$u(a) \frac{r^n}{n} = \frac{1}{n\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B(a,\rho)} u(x)dS(x) \right) d\rho.$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_0^r \left(\int_{\partial B(a, \rho)} u(x) dS(x) \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(a, r)} u(y) dy. \end{aligned}$$

Zadatak 1

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ograničena oblast, $K \subset \Omega$ kompaktan skup i $1 \leq p \leq +\infty$. Dokazati da postoji konstanta $C = C(K, \Omega, p)$ takva da za svaku funkciju $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ koja je harmonijska na Ω i koja pripada $L^p(\Omega)$, kao i za svako $(x, y) \in K$ važi $|u(x, y)| \leq C\|u\|_p$.

Neka je $(x_0, y_0) \in \Omega$ proizvoljno i neka je $r > 0$ takvo da je

$$\overline{D}((x_0, y_0), r) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\} \subset \Omega.$$

Kako je funkcija u harmonijska na Ω sledi da za svako $\rho \in [0, r]$ važi

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial D((x_0, y_0), \rho)} u(x, y) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sin t) dt. \end{aligned}$$

Množenjem poslednje jednakosti sa ρ , a zatim i integraljenjem po ρ od 0 do r dobijamo

$$\frac{r^2 u(x_0, y_0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos t, y_0 + \rho \sin t) \rho dt \right) d\rho,$$

tj.

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D}((x_0, y_0), r)} u(x, y) dx dy.$$

Pretpostavimo da je $1 < p < +\infty$.

Neka je $(x_0, y_0) \in K$ proizvoljno i neka je $r = \frac{1}{2}d(K, \Omega^c)$.

Kako je

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D}((x_0, y_0), r)} u(x, y) dx dy,$$

sledi da je

$$|u(x_0, y_0)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D}((x_0, y_0), r)} |u(x, y)| dx dy \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} |u(x, y)| dx dy.$$

Otuda na osnovu Helderove nejednakosti dobijamo

$$|u(x_0, y_0)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\iint_{\Omega} |u(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint_{\Omega} 1^{\frac{p}{p-1}} dx dy \right)^{1-\frac{1}{p}},$$

odnosno

$$|u(x_0, y_0)| \leq \frac{m(\Omega)^{1-\frac{1}{p}}}{\pi \left(\frac{1}{2} d(K, \Omega^c) \right)^2} \|u\|_p.$$

Slučajeve $p = 1$ i $p = +\infty$ uraditi za domaći zadatak.

Podsetimo se da za holomorfne funkcije važi princip maksimuma modula. Tj. važi sledeća teorema.

Teorema 4

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ oblast i neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Ako funkcija $|f|$ ima maksimum na Ω onda je f konstantna funkcija.

Za harmonijske funkcije važi princip maksimuma. Preciznije važi sledeća teorema.

Teorema 5 (Princip maksimuma)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast i neka je $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija. Ako funkcija u ima maksimum na Ω onda je u konstantna funkcija.

Dokaz. Neka je $a \in \Omega$ takva da funkcija u dostiže maksimum u tački a . Sa A obeležimo skup $u^{-1}(\{u(a)\})$. Ako dokažemo da je $A = \Omega$ dokazali smo da je u konstantna funkcija.

Kako je Ω povezan skup i $A \neq \emptyset$, da bismo dokazali da je $A = \Omega$ dovoljno je da dokažemo da je skup A i zatvoren i otvoren u Ω .

Funkcija u je neprekidna, pa je A zatvoren skup kao inverzna slika zatvorenog skupa $\{u(a)\}$.

Dokažimo da je A otvoren skup. To ćemo dokazati tako što ćemo pokazati da za svako $x \in A$ postoji $r > 0$ takvo da je $B(x, r) \subset A$.

Neka je $x \in A$ proizvoljno. Kako funkcija u dostiže maksimum u tački x , sledi da za svako $y \in \Omega$ važi

$$(13) \quad u(y) \leq u(x).$$

S druge strane, neka je $r > 0$ takvo da $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$.

Na osnovu teoreme 3 važi

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(x, r)} u(y) dy,$$

odnosno kako je $\int_{\overline{B}(x, r)} dy = \omega_n r^n$, važi

$$(14) \quad \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\overline{B}(x, r)} (u(x) - u(y)) dy = 0.$$

Dalje, iz (13) i (14) uzimajući u obzir da je funkcija u neprekidna na Ω dobijamo $u(y) = u(x)$, za svako $y \in \overline{B}(x, r)$.

Dakle, $\overline{B}(x, r) \subset A$.

Naredne teoreme su posledice principa maksimuma za harmonijske funkcije, tj. teoreme 5.

Teorema 6 (Princip minimuma)

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast i neka je $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija. Ako funkcija u ima minimum na Ω onda je u konstantna funkcija.

Dokaz. Kako je funkcija $v = -u$ harmonijska na Ω i kako funkcija v ima maksimum na Ω , na osnovu teoreme 5 sledi da je funkcija v konstantna na Ω . Dakle, i funkcija u je konstantna na Ω .

Teorema 7

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast i neka je funkcija $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na $\overline{\Omega}$ i harmonijska na Ω . Tada je

$$(15) \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

i

$$(16) \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Dokaz. Pre svega primetimo da su $\overline{\Omega}$ i $\partial\Omega$ kompaktni skupovi u $\mathbb{R}^n$, pa kako je funkcija u neprekidna na $\overline{\Omega}$ na osnovu Vajerštrasove teoreme sledi da svi navedeni maksimumi i minimumi postoje.

Dokažimo (15).

Ako postoji $x_0 \in \Omega$ takvo da je $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ onda funkcija u dostiže maksimum na Ω . Otuda na osnovu teoreme 5 sledi da je funkcija u konstantna na Ω , a zbog neprekidnosti i na $\overline{\Omega}$. Dakle, važi (15).

Ako ne postoji $x_0 \in \Omega$ takvo da je $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ onda (15) trivijalno važi.

Analogno se dokazuje jednakost (16), s tim što se umesto teoreme 5 koristi teorema 6.

Teorema 8 (Jedinstvenost rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na ograničenoj oblasti)

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast. Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na oblasti Ω može imati najviše jedno rešenje.

Dokaz. Pretpostavimo da su u_1 i u_2 dva rešenja odgovarajućeg Dirihleovog problema i dokažimo da je $u_1 = u_2$. U tom cilju, neka je $U = u_1 - u_2$. Tada za funkciju U važi

- 1° $U \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta U(x) = 0$ za svako $x \in \Omega$;
- 3° $U(x) = 0$ za svako $x \in \partial\Omega$.

Na osnovu teoreme 7 sledi da je $\max_{\overline{\Omega}} U = 0$ i $\min_{\overline{\Omega}} U = 0$. Stoga je $U = 0$ na $\overline{\Omega}$.

Ostaju dva pitanja:

Da li Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na Ω ima rešenje?

Ako Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na Ω ima rešenje, kako odrediti to rešenje?