

6. čas iz Distribucija i parcijalnih jednačina A/Jednačina matematičke fizike

Marek Svetlik
svetlik@matf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet

Beograd, 26. oktobar 2022.

©Marek Svetlik. Ovi slajdovi se ne smeju postavljati na druge veb lokacije ni u celini, a ni u delovima bez prethodne pisane saglasnosti autora. Dozvoljeno je štampanje slajdova samo za lične potrebe.

IV LAPLASOVA JEDNAČINA

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup.

Laplasijan funkcije $u \in C^2(D; \mathbb{R})$ jeste zbir

$$u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}.$$

Laplasijan funkcije u obeležava se sa Δu .

Laplasova jednačina (preciznije, *Laplasova jednačina na D*) jeste parcijalna jednačina

$$\Delta u = 0,$$

pri čemu je $u \in C^2(D; \mathbb{R})$ nepoznata funkcija.

Funkcija $u \in C^2(D; \mathbb{R})$ koja zadovoljava Laplasovu jednačinu naziva se *harmonijska funkcija* (preciznije, *harmonijska funkcija na D*).

Na primer, funkcije

$u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u_1(x, y) = x^2 - y^2$;

$u_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u_2(x, y) = e^x \cos y$;

$u_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u_3(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

$u_4 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u_4(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

jesu harmonijske funkcije na svojim oblastima definisanosti (tj. rešenja odgovarajuće Laplasove jednačine).

Zatim, ako je $n \geq 3$ onda je funkcija $u_4 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u_4(x) = |x|^{2-n}$ (sa $|\cdot|$ obeležavamo standardnu euklidsku normu u $\mathbb{R}^n$) harmonijska na svom domenu.

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup. Za funkciju $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je *kompleksno-vrednosna harmonijska funkcija na D* ako su funkcije $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ harmonijske na D .

Neka osnovna svojstva harmonijskih funkcija

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan otvoren skup.

Konstantne funkcije (specijalno nula funkcija) definisane na D jesu harmonijske funkcije na D .

Zbir dve harmonijske funkcije na D jeste harmonijska funkcija na D .

Proizvod skalara i harmonijske funkcije na D jeste harmonijska funkcija na D .

Preciznije, skup svih realno-vrednosnih harmonijskih funkcija na D ima strukturu vektorskog prostora nad $\mathbb{R}$.

Analogno, skup svih kompleksno-vrednosnih harmonijskih funkcija na D ima strukturu vektorskog prostora nad $\mathbb{C}$.

Neka je $a \in \mathbb{R}^n$ fiksirano i neka je $D + a = \{x + a : x \in D\}$.

Ako je $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ harmonijska funkcija na D onda je funkcija $v : D + a \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa $v(x) = u(x - a)$ harmonijska na $D + a$. Ovo svojstvo naziva se *invarijantnost harmonijskih funkcija pri translaciji*. Dokazati to za domaći zadatak.

Neka je $r > 0$ fiksirano i neka je $rD = \{rx : x \in D\}$.

Ako je $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ harmonijska funkcija na D onda je funkcija $v : rD \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa $v(x) = u\left(\frac{x}{r}\right)$ harmonijska na rD . Ovo svojstvo naziva se *invarijantnost harmonijskih funkcija pri homotetiji*. Dokazati to za domaći zadatak.

Fundamentalno rešenje Laplasove jednačine

Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Pretpostavimo da je $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (tj. rešenje Laplasove jednačine na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) takva da za svako $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ važi $u(x) = v(|x|)$ za neku funkciju $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Drugim rečima, pretpostavimo da vrednosti funkcije u u tački $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zavise samo od rastojanja tačke x i tačke 0.

Kako je $u(x) = v(|x|)$, sledi da za $i = 1, \dots, n$ važi

$$u_{x_i}(x) = v'(|x|) \frac{x_i}{|x|},$$

kao i

$$u_{x_i x_i}(x) = v''(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}.$$

Otuda je

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) \\ &= v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} v'(|x|).\end{aligned}$$

Kako je $\Delta u(x) = 0$ dobijamo

$$(1) \quad v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} v'(|x|) = 0.$$

Nakon smene $r = |x|$ i $w = v'$ iz (1) dobijamo

$$w'(r) + \frac{n-1}{r} w(r) = 0.$$

Rešavanjem poslednje jednačine dobijamo

$$w(r) = C_1 r^{1-n},$$

gde je $C_1 \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Dalje, nakon vraćanja smene dobijamo $v'(r) = C_1 r^{1-n}$, a samim tim i

$$v(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & n = 2, \\ \frac{C_1}{2-n} r^{2-n} + C_2, & n \geq 3, \end{cases}$$

gde su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Konačno,

$$u(x) = \begin{cases} C_1 \ln |x| + C_2, & n = 2, \\ \frac{C_1}{2-n} |x|^{2-n} + C_2, & n \geq 3, \end{cases}$$

gde su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljni.

Specijalno, ako je $C_1 = -(n\omega_n)^{-1}$ (ω_n je zapremina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$) i $C_2 = 0$ funkcija u naziva se *fundamentalno rešenje* Laplasove jednačine.

Veza harmonijskih funkcija dve promenljive sa holomorfnim funkcijama

Postoje interesantne veze između harmonijskih funkcija dve promenljive i holomorfnih funkcija.

Ako je $D \subseteq \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup i $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na D , onda su $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ harmonijske funkcije na D , odnosno f je kompleksno-vrednosna harmonijska funkcija na D .

Ako je $D \subseteq \mathbb{C}$ prosto povezana oblast i $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonijska funkcija na D , onda postoji holomorfna funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ (jedinstvena do na aditivnu konstantu) takva da je $u = \operatorname{Re} f$.

Zadatak 1

Neka je $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

- a) Dokazati da je funkcija u harmonijska na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- b) Dokazati da ne postoji holomorfna funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ takva da je $u = \operatorname{Re} f$.

Deo a) neka ostane za domaći zadatak.

Uradimo deo b). Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji holomorfna funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ takva da je $u = \operatorname{Re} f$. Tada za svako $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ važi $f'(z) = u_x(z) - iu_y(z)$, odnosno

$$f'(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

Dalje, neka je $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa $\gamma(t) = e^{it}$.

Tada je

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

Međutim, s druge strane važi i

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f'(z) dz &= \int_0^{2\pi} f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= (f \circ \gamma)(2\pi) - (f \circ \gamma)(0) = 0. \end{aligned}$$

Otuda je $2\pi i = 0$. Dakle, dobili smo kontradikciju.

Pitanje za razmišljanje: Neka je $\mathbb{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ i neka je $u : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Da li postoji holomorfna funkcija $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ takva da je $u = \operatorname{Re} f$?

Ako postoji odrediti tu funkciju.

Zadatak 2

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ oblast i $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ takva da su f i f^2 harmonijske na Ω . Dokazati da je f ili $\bar{f}$ holomorfna funkcija na Ω .

Neka je $D \subset \mathbb{C}$ neprazan otvoren skup. Po definiciji, funkcija $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ jeste harmonijska na D ako su funkcije $\operatorname{Re} g$ i $\operatorname{Im} g$ harmonijske funkcije na D .

Jasno je da je svaka funkcija $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ koja je holomorfna na D i harmonijska na D . Obratno nije tačno.

Neka je $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$.

Dakle, treba da dokažemo da je $f = u + iv$ ili $\overline{f} = u - iv$ holomorfna funkcija.

Važi $f^2 = u^2 - v^2 + i2uv$. Dakle, po pretpostavci imamo da je

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, \\ \Delta v(x, y) &= 0, \\ \Delta(u^2 - v^2)(x, y) &= 0, \\ \Delta(uv)(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

za svako $(x, y) \in \Omega$.

Nadalje pretpostavimo da je $(x, y) \in \Omega$ proizvoljno i nećemo više pisati argumente funkcija.

Neposrednim računanjem dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta(u^2 - v^2) &= (u^2 - v^2)_{xx} + (u^2 - v^2)_{yy} \\ &= 2(u_x^2 - v_x^2 + uu_{xx} - vv_{xx}) \\ &\quad + 2(u_y^2 - v_y^2 + uu_{yy} - vv_{yy}).\end{aligned}$$

Otuda, kako je $\Delta u = \Delta v = 0$ i $\Delta(u^2 - v^2) = 0$, sledi

$$u_x^2 + u_y^2 - v_x^2 - v_y^2 = 0.$$

Takođe, neposrednim računanjem dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (uv)_{xx} + (uv)_{yy} \\ &= (u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx}) \\ &\quad + (u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy}).\end{aligned}$$

Otuda, kako je $\Delta u = \Delta v = 0$ i $\Delta(uv) = 0$, sledi

$$u_xv_x + u_yv_y = 0.$$

Dakle,

$$u_x^2 + u_y^2 - v_x^2 - v_y^2 + 2i(u_x v_x + u_y v_y) = 0$$

i otuda

$$(u_x + iv_x)^2 + (u_y + iv_y)^2 = 0.$$

Dalje, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$(u_x + iv_x + iu_y - v_y) \cdot (u_x + iv_x - iu_y + v_y) = 0.$$

Otuda je

$$u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$$

ili

$$u_x + iv_x - iu_y + v_y = 0.$$

Primetimo da je jednakost

$$u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$$

ekvivalentna sa jednakostima

$$u_x = v_y,$$

$$v_x = -u_y,$$

odnosno Koši-Rimanovim jednakostima za funkciju f .

Takođe, primetimo da je jednakost

$$u_x + iv_x - iu_y + v_y = 0$$

ekvivalentna sa jednakostima

$$u_x = -v_y,$$

$$v_x = u_y,$$

odnosno Koši-Rimanovim jednakostima za funkciju $\overline{f}$.

Otuda sledi da je funkcija f ili funkcija $\overline{f}$ holomorfna na Ω .

Međutim, da li je ovo rešenje korektno?

Postoji propust.

Propust je u koraku:

Iz

$$(u_x + iv_x + iu_y - v_y) \cdot (u_x + iv_x - iu_y + v_y) = 0,$$

sledi da je

$$u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$$

ili

$$u_x + iv_x - iu_y + v_y = 0.$$

Ako je proizvod dve funkcije nula funkcija, ne mora da znači da je bar jedna od tih funkcija nula funkcija.

Čak i ako te dve funkcije pripadaju $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Ali, šta ako su te dve funkcije holomorfne na Ω ?

Ako su dve funkcije holomorfne na Ω i ako je njihov proizvod nula funkcija, onda je bar jedna od tih funkcija nula funkcija (objasniti zašto).

Neka je $G : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa

$$G = u_x + iv_x + iu_y - v_y = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y),$$

i neka je $H : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa

$$H = u_x + iv_x - iu_y + v_y = (u_x + v_y) + i(v_x - u_y).$$

Ispostavlja se da su funkcije $\overline{G}$ i H holomorfne na Ω .

Osim toga iz

$$(u_x + iv_x + iu_y - v_y) \cdot (u_x + iv_x - iu_y + v_y) = 0,$$

sledi

$$G \cdot H = 0,$$

a samim tim i

$$\overline{G} \cdot H = 0.$$

Otuda, kako su funkcije $\overline{G}$ i H holomorfne na Ω , sledi da je

$$\overline{G} = 0 \text{ na } \Omega$$

ili

$$H = 0 \text{ na } \Omega.$$

Međutim, kako je $\overline{G} = 0$ ekvivalentno sa $G = 0$ dobijamo traženi zaključak.

Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast i neka je $g \in C(\partial\Omega; \mathbb{R})$ data funkcija. *Dirihleov problem za Laplasovu jednačinu na oblasti Ω* odnosi se na određivanje funkcije $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

- 1° $u \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^2(\Omega; \mathbb{R})$;
- 2° $\Delta u(x) = 0$ za svako $x \in \Omega$;
- 3° $u(x) = g(x)$ za svako $x \in \partial\Omega$.

Interesuju nas egzistencija i jedinstvenost rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na oblasti Ω .

Odgovarajuća tvrđenja zavise od dimenzije (razlikuju se slučajevi $n = 2$ i $n \geq 3$) i od svojstava oblasti Ω .

Na primer, za početak interesuje nas egzistencija i jedinstvenost rešenja Dirihleovog problema za Laplasovu jednačinu na oblasti $B(a, R)$.

Ovde je sa $B(a, R)$ obeležena lopta u $\mathbb{R}^n$ čiji je centar $a \in \mathbb{R}^n$ i poluprečnik $R > 0$, tj. $B(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < R\}$.

Kako bismo formulisali i dokazali odgovarajuća tvrđenja, najpre ćemo izučiti neka svojstva harmonijskih funkcija.

Da bismo izučili ta svojstva potrebno je da podsetimo nekih pojmova i tvrđenja iz Analize 2.

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ oblast koja je homeomorfna jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^{n-1}$ i neka je preslikavanje $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$ takvo da je $\varphi|_D$ injektivno preslikavanje na D , $S = \varphi(D)$ i $\overline{S} = \varphi(\overline{D})$.

Skup S naziva se $(n-1)$ -*dimenziona orijentisana elementarna C^1 površ*. Preslikavanje φ naziva se parametrizacija površi S .

Na primer, ako je $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ i $D = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ i ako je $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definisana sa

$$\begin{aligned}\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}) &= a_1 + R \cos t_1, \\ \varphi_2(t_1, \dots, t_{n-1}) &= a_2 + R \sin t_1 \cos t_2, \\ \varphi_3(t_1, \dots, t_{n-1}) &= a_3 + R \sin t_1 \sin t_2 \cos t_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots, \\ \varphi_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) &= a_{n-1} + R \sin t_1 \dots \sin t_{n-2} \cos t_{n-1}, \\ \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}) &= a_n + R \sin t_1 \dots \sin t_{n-2} \sin t_{n-1},\end{aligned}$$

onda je $\varphi(\overline{D}) = \partial B(a, R)$, tj. sfera u $\mathbb{R}^n$ čiji je centar a i poluprečnik R .

Neka je $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ parametrizacija proizvoljne $(n - 1)$ –dimenzione orijentisane elementarne C^1 površi S .

Uvedimo oznake $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$.

Sa $\Gamma_\varphi(t)$ obeležimo gramijan uređene $(n - 1)$ –torke vektora

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) & = & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(t) \right), \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) & = & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \right). \end{array}$$

Dakle,

$$\Gamma_{\varphi}(t) = \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t), \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\rangle \end{vmatrix},$$

gde je sa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ obeležen standardni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$.

Za neprekidnu funkciju $f : \overline{S} \rightarrow \mathbb{R}$ definišemo *površinski integral funkcije f po $\overline{S}$* na sledeći način:

$$\int_{\overline{S}} f dS = \int_{\overline{S}} f(x) dS(x) = \int_{\overline{D}} f(\varphi(t)) \sqrt{\Gamma_{\varphi}(t)} dt.$$

Površina površi S i površi $\overline{S}$ jeste $\int_{\overline{S}} dS$.

Može se izračunati da je površina površi $\partial B(a, R)$ jednaka $nR^{n-1}\omega_n$, pri čemu je ω_n zapremina lopte $B(0, 1)$. Napomenimo i da je zapremina lopte $B(a, R)$ jednaka $R^n\omega_n$.

U formulacijama sledećih nekoliko teorema i njihovih posledica pretpostavljamo da je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast takva da je $\partial\Omega$ konačna unija zatvorenja $(n-1)$ -dimenzionih orijentisanih elementarnih C^1 površi.

Takođe, neka je $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ spoljašnji jedinični vektor normale na $\partial\Omega$ u tački $x \in \partial\Omega$ i neka je $\frac{\partial}{\partial \nu}$ izvod u pravcu tog vektora.

Teorema 1 (Formula Grin-Gaus-Ostrogradski)

Neka je $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Tada je

$$(2) \quad \int_{\overline{\Omega}} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_i dS, \quad \text{za svako } i = 1, \dots, n.$$

Posledica 1 (Parcijalna integracija)

Neka su $u, v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Tada je

$$(3) \quad \int_{\overline{\Omega}} u_{x_i} v dx = - \int_{\overline{\Omega}} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i dS, \quad \text{za svako } i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Na osnovu (2) imamo da za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$\int_{\overline{\Omega}} (uv)_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i dS.$$

Otuda, kako je $(uv)_{x_i} = u_{x_i} v + u v_{x_i}$, dobijamo (3).

Posledica 2 (Prvi Grinov identitet)

Neka je $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Tada je

$$(4) \quad \int_{\overline{\Omega}} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Dokaz. Podsetimo se da je $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle$. Ako u (2) umesto u uzmemo u_{x_i} dobijamo da za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$(5) \quad \int_{\overline{\Omega}} u_{x_i} x_i dx = \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \nu_i dS.$$

Iz (5) odgovarajućim sabiranjem dobijamo (4).

Posledica 3 (Drugi Grinov identitet)

Neka su $u, v \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Tada je

$$(6) \quad \int_{\overline{\Omega}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\overline{\Omega}} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$

Dokaz. Ako u (3) umesto v uzmemo v_{x_i} dobijamo da za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$(7) \quad \int_{\overline{\Omega}} u_{x_i} v_{x_i} dx = - \int_{\overline{\Omega}} u v_{x_i x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v_{x_i} \nu_i dS.$$

Iz (7) odgovarajućim sabiranjem dobijamo (6).

Posledica 4 (Treći Grinov identitet)

Neka su $u, v \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$. Tada je

$$(8) \quad \int_{\overline{\Omega}} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Dokaz. Na osnovu (6) važi

$$(9) \quad \int_{\overline{\Omega}} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\overline{\Omega}} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS,$$

ali i

$$(10) \quad \int_{\overline{\Omega}} \langle \nabla v, \nabla u \rangle dx = - \int_{\overline{\Omega}} v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

Oduzimanjem odgovarajućih strana jednakosti (9) i (10) dobijamo (8).