Колоквијум из Линеарне алгебре, токови 1о2 и 1о3 *30. мај 2024.*

1. Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & \cdots & 3n-5 & 3n-2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 1 & n-1 \\ n & n & n & n & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор дефинисан са

$$L(x, y, z) = (2x - 2y + z, 9x - 7y + 3z, 6x - 4y + z).$$

а) Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу векторског простора $\mathbb{R}^3$, као и карактеристични и минимални полином оператора L.

б) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L. Наћи бар једну базу f простора $\mathbb{R}^3$ у којој L има дијагоналну матрицу и одредити $[L]_f$.

3. На векторском простору $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ је дат скаларни производ $\langle \_, \_ \rangle : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ са

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\left(B^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A \right).$$

а) Одредити бар једну ортонормирану базу потпростора $U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right)$ у односу на овај скаларни производ.

б) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ на потпростор U, а затим и угао који тај вектор заклапа са потпростором U.