

1. Израчунати детерминанту

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & \dots & x_n^2 + x_n \\ x_1^3 + x_1^2 & x_2^3 + x_2^2 & \dots & x_n^3 + x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

у зависности од параметара $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

2. Нека је $L : \mathbb{R}^3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3[X]$ линеарни оператор дефинисан са

$$L(g(X)) = g(0)(-1 - 2X + 4X^2) + g'(1)(-1 + 2X^2) + g''(0)(-X + \frac{1}{2}X^2).$$

- Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $e = [1, X, X^2]$ векторског простора $\mathbb{R}^3[X]$, као и карактеристични и минимални полином оператора L ;
- Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора L . Наћи бар једну базу f простора $\mathbb{R}^3[X]$ у којој L има дијагоналну матрицу и одредити $[L]_f$.

3. Дато је пресликавање $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ на следећи начин:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_1.$$

- Доказати да је $\cdot$ скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^3$.
- Одредити бар једну ортонормирану базу потпростора $U = \mathcal{L}((1, 0, -1), (2, 3, 1))$ у односу на овај скаларни производ.
- Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (4, 2, 4)$ на потпростор U , а затим и растојање тог вектора од потпростора U .