6) Funkcije $1+3x^2-x^5$, $6+x+4x^5$ s oblasti R.

7) Funkcije $\cos x$, $\sin x$ definirane u R.

8) Matrice $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}23 & 3{,}4 \\ 7{,}2 & 5{,}04 & 2{,}3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7{,}2 & 3{,}4 & -5{,}2 \end{bmatrix}$.

9) Nizovi $\cos \omega' x$, $\sin \omega' x$; pri tom ω' prolazi beskonačnim cifarskim intervalom $I\omega' = \{0, 1, 2, \cdots\}$; nadalje, $x \in R$.

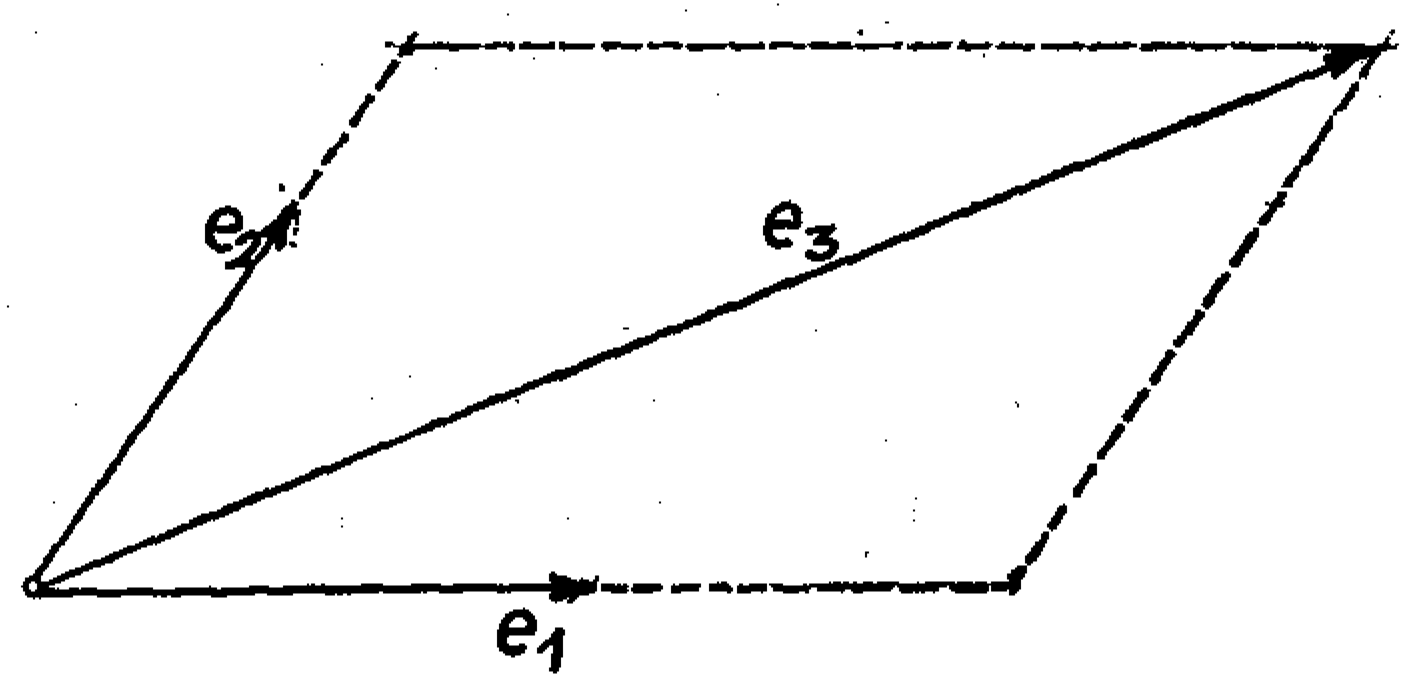
10) $\int\limits_0^x \cos^2 t\, dt$, $\int\limits_0^x \sin^2 t\, dt$.

4. LINEARNA ZAVISNOST VEKTORA. LINEARNA NEZAVISNOST VEKTORA

4.0. Priprema. Promatramo li na zadanoj pravulji p bilo koji vektor $\vec{e}$ koji je $\neq \vec{0}$, tada se **svaki** *drugi vektor* $\vec{v}$ s pravulje p može izraziti pomoću $\vec{e}$ u obliku $c\vec{e}$, tj. $\vec{v} = c\vec{e}$, odnosno $\vec{v} - c\vec{e} = \vec{0}$ gdje je c određen broj.

Specijalno, za $\vec{v} = \vec{0}$ imamo $c = 0$. Ako je $c \neq 0$, tada se i $\vec{e}$ može izraziti pomoću $\vec{v}$. *Bilo koja dva vektora na pravulji međusobno su vezana linearno.*

Naprotiv, u ravnini imamo i parova nezavisnih vektora: svaki par e_1, e_2 vektorâ koji zatvaraju oštar kut međusobno su nezavisni linearno, tj. jedan se ne može izraziti linearno pomoću drugoga, odnosno: nula-veza



Sl. 13.4.0.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \vec{0}, \qquad \lambda_{2\cdot} \in R$$

ima nužno za posljedicu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Naprotiv, ako je e_3 bilo koji treći vektor u ravnini, onda se nula-veza

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \vec{0}$$

uz uslov $\lambda_{3'} \in R$ može ostvariti i netrivijalno (tako npr. na slici je

$$e_3 = 2e_1 + 1{,}5 e_2 \quad \text{tj.} \quad 2e_1 + 1{,}5 e_2 - e_3 = \vec{0}).$$

Primjer s jednadžbama i nizovima. Jednadžbe

$$2x_0 + 3x_1 = 4, \ \ 4x_0 + 6x_1 = 8$$

međusobno su zavisne; „pripadni“ nizovi

$$2,\ 3,\ 4$$
$$4,\ 6,\ 8$$

također; naprotiv, jednadžbe $2x+y=1$, $4x+y=5$ ne zavise međusobno linearno; isto vrijedi za dva niza 2, 1, 1 i 4, 1, 5.

Imajući na umu ta svakidašnja i elementarna razmatranja i, osim toga, znajući kako je raznovrstan i općenit pojam vektora (isp. § 3), prelazimo na preciziranje linearne zavisnosti (nezavisnosti) vektorâ i dokazivanje nekih osnovnih stvari o „dimenziji" vektorskih prostora.

Neka slika jednostavnih gornjih primjera služi kao oslonac i vodilja u općim razmatranjima.

Rang matrice kao zajednički maksimalni broj linearno nezavisnih njenih stupaca, odnosno redaka, odnosno kao maksimalni stupanj regularnih submatrica, osnovni je pojam u algebri. Druga je osnovna činjenica *istobrojnost svakog para bazâ* u svakom vektorskom *prostoru* (teorem 4.6.1.) i izomorfizam između V_k i V_n za $k=n<\infty$ (teorem 4.6.1).

4.1. Definicija linearne nezavisnosti[1]. Zadani konačni niz od s vektora[2] $v_{s'}$ je *linearno nezavisan ili slobodan* ako iz veza

(1) $$\sum_{s'} \lambda_{s'} x_{s'} = 0, \quad \lambda_{s'} \in R$$

nužno izlazi

(2) $$\lambda_{s'} = 0 \quad \text{za svako} \quad s' = 1, 2, \cdots, s.$$

Ako su veze (1) moguće i bez uslova (2), kaže se da su vektori $v_{s'}$, tj. vektori $v_1, v_2, \cdots, v_s$, *linearno zavisni*; pri tom je s prirodan broj.

4.1.1. Kaže se da je zadani *beskonačni skup M* vektorâ linearno nezavisan ako mu je svaki *konačni dio linearno nezavisan*. Beskonačni skup vektora je *linearno zavisan* ako mu je bar jedan konačan podskup linearno zavisan.

4.2. Primjeri. — **4.2.1.** Je su li stupci matrice $a=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ linearno zavisni ili nezavisni?

Imamo stupce $a_{\cdot 1}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $a_{\cdot 2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$; treba ispitati veze

(3) $$\lambda_1 a_{\cdot 1} + \lambda_2 a_{\cdot 2} = \vec{0}, \qquad \lambda_{2'} \in R.$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \cdot 3 \\ \lambda_1 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \cdot 0 \\ \lambda_2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3\lambda_1 + 0 \\ 0 + 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

[1] Rus.: зависимость, независимость; franc.: dépendance-indépedance: njem.: Abhängigkeit-Unabhängigkeit.

[2] Vektori $v_1, \cdots, v_s$ su izvađeni iz nekog vektorskog prostora V nad tijelom R ili generiraju neki vektorski prostor nad R.

Odatle izlazi:

$$3\lambda_1=0, \quad 5\lambda_2=0, \quad \text{tj.}$$

(4) $$\lambda_1=0 \quad \text{i} \quad \lambda_2=0.$$

Dakle (3) $\Rightarrow$ (4): stupci su linearno nezavisni.

4.2.1.1. Analogno: Stupci (réci) u svakoj *dijagonalnoj matrici* bez 0 na dijagonali međusobno su linearno nezavisni. Dokaži!

4.2.2. Jesu li nizovi

(1) $$\begin{aligned} f_0 &= 2, & 3, && 5, && 4\\ f_1 &= 3, & -4, && 2, && 3\\ f_2 &= 5, & -3, && 4, && 2 \end{aligned}$$

linearno zavisni ili nezavisni?

Treba riješiti jednadžbu

(2) $$x_0 f_0 + x_1 f_1 + x_2 f_2 = \text{nula-niz} = (0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

No, formirajući linearni spoj, imamo po redu:

$$x_0 f_0 + x_1 f_1 + x_2 f_2 = x_0 (2,\ 3,\ 5,\ 4) + x_1 (3,\ -4,\ 2,\ 3) + x_2 (5,\ -3,\ 4,\ 2) =$$
$$= (2x_0,\ 3x_0,\ 5x_0,\ 4x_0) + (3x_1,\ -4x_1,\ 2x_1,\ 3x_1) + (5x_2,\ -3x_2,\ 4x_2,\ 2x_2) =$$
$$= (\text{sumacija nizova!}) =$$
$$= (2x_0+3x_1+5x_2,\ 3x_0-4x_1-3x_2,\ 5x_0+2x_1+4x_2,\ 4x_0+3x_1+2x_2).$$

Na taj način jednadžba (2) postaje

(3) $$(2x_0+3x_1+5x_2,\ 3x_0-4x_1-3x_2,\ 5x_0+2x_1+4x_2,$$
$$4x_0+3x_1+2x_2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Odatle, izjednačenjem odgovarajućih članova u nizu $(3)_1$ i u nizu $(3)_2$, izlazi ovaj sistem jednadžbi:

(4) $$\begin{aligned} 2x_0+3x_1+5x_2&=0\\ 3x_0-4x_1-3x_2&=0\\ 5x_0+2x_1+4x_2&=0\\ 4x_0+3x_1+2x_2&=0. \end{aligned}$$

Lako se uvjerimo da odatle nužno izlazi $x_0=x_1=x_2=0$. To znači da jednadžba (2) ima trivijalno rješenje kao jedino rješenje. A to po definiciji znači da su nizovi (1) linearno nezavisni.

4.2.2.1. Primjedba. Treba uočiti kako ispitivanje *linearne zavisnosti nizova* (1) dovodi do razmatranja *sistema homogenih* jednadžbi (4) i da je matrica toga sistema (4) upravo matrica sačinjena od zadanih nizova (1) kao svojih **stupaca,** tj. matrica sistema (1) je $[f_0, f_1, f_2]$. *Ta je veza bitna.*

4.2.3. Primjer. Jesu li *jednadžbe*

$$2x+3y+5z=4$$
$$3x-4y+2z=3$$
$$5x-3y+4z=2$$

linearno zavisne ili nezavisne?

Treba pogledati proširenu matricu tih jednadžbi i usporediti je sa zadatkom 4.2.2. Jednadžbe su nezavisne! Provedite formalan dokaz!

4.2.4. Primjer. Jesu li tri funkcije: $x\to 1$, $x\to x$, $x\to x^2$, koje su definirane u intervalu $R[0, 1]$ realnih brojeva, linearno zavisne ili nezavisne?

Da odgovorimo na pitanje, treba promatrati pripadni nula-spoj:

$$\lambda_0\cdot 1+\lambda_1\cdot x+\lambda_2\cdot x^2=\vec{0};$$

to znači da treba biti

$$(1) \qquad \lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2=0$$

za **svako** $0\leq x\leq 1$; pri tom su $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ **fiksni** brojevi. No, kako su λ fiksni brojevi, jednadžba (1) je algebarska. Ako je $\lambda_2\neq 0$, tada on ima samo jedno ili dva rješenja, naime brojeve oblika

$$\frac{-\lambda_1+(\lambda_1^2-4\lambda_0\lambda_2)^{1/2}}{2\lambda_2}.$$

A to znači da su spomenute tri potencija-funkcije 1, x, x^2 s domenom $R[0, 1]$ linearno nezavisne.

4.3. Što znači da zadan skup M određuje i razapinje zadani prostor V? Dimenzija.

4.3.1. Razapinjanje. Za zadani skup M vektorâ neka $L(R, M)$ označuje skup svih vektora oblika

$$\lambda_1 x_1,\ \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2,\ \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3, \cdots,$$

pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \in R$, $x_1, x_2, \cdots \in M$; primijetimo da i u sumi dolazi najviše konačno mnogo brojeva λ_n, različitih od nule. Kaže se da M, odnosno *vektori iz M, razapinju (određuju) prostor $L(R, M)$.*

4.3.2. Pojam dimenzije. Minimalni glavni (kardinalni) broj množine M, za koju je $L(R, M)=V$ (zadani prostor V), zove se *dimenzija prostora V*; označuje se sa $\dim V$. Ili općenitije: za svaki neprazni skup $S\neq\{\vec{0}\}$ iz vektorskog prostora definiramo $\dim S$ kao *minimalni kardinalni broj* množina M sa svojstvom $L(R, M)\supset S$.

Npr. funkcije u R: $x\to 2$, $x\to x^3$, $x\to x^4$ razapinju prostor $L(R, \{2, x^3, x^4\})$ polinomâ $\lambda_3\cdot 2+\lambda_3\cdot x^3+\lambda_4 x^4$; kako su te funkcije linearno nezavisne (isp. primjer 4.2.4), dimenzija je prostora $=3$.

4.4. Baza zadanog vektorskog prostora V. — 4.4.1. Definicija. *Svaki normalno dobro uređeni skup B linearno nezavisnih vektora za koje je $L(R, B)=$ $=V$ zove se baza prostora V.*

Prema tome, kod baze se traži troje:

1) Baza je „normalno dobro uređen" skup tako da se zna njen prvi element B_1, pa drugi element B_2 (ukoliko ga ima), itd. i k tome da nijedan početni komad niza ne bude istobrojan s čitavim nizom (to je potrebno spomenuti za prostore s beskonačno mnogo dimenzija, da se ne dogodi da bazu zapišemo npr. ovako: $B_1, B_2, \cdots, B_n, B_{n+1}, \cdots, B_\omega$).

2) *U bazi nema linearno zavisnih vektora* (zato nula-vektor nije u B jer je nula-vektor zavisan od svakog vektora).

3) *Svaki član $v \in V$ može se prikazati pomoću konačno mnogo članova* $x_0(v), x_1(v) \cdots$ iz baze B u tom smislu da je $v = v_0 x_0(v) + v_1 x_1(v) + \cdots$; pri tom su $v_0(v), v_1(v), \cdots \in R$.

Ako je baza B konačna i ima n članova, označujemo ih po redu:

$$B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}, B_n \text{ i pišemo } B = \{B_{n'}\}_{n'} \text{ ili } \{B_{n'}\}$$

znajući da n' prelazi intervalom $1\,(n)$.

⟶ 4.4.2. Jednoznačnost izražavanja vektora pomoću zadane baze.
Teorem. ***Neka je V vektorski prostor nad tijelom R; ako je B baza u V, tada za svaki član $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, postoji potpuno određeno preslikavanje baze B u R: $x \to v_x\,(x \in B)$ sa svojstvom da je $v_x \neq 0$ na konačnom dijelu baze B izvan kojeg je $v_x = 0$ i da je***

$$v = \sum_{x \in B} v_x x. \tag{1}$$

Specijalno, ako je baza B konačna i $B = \{B_{n'}\}_{n'}$, tada je potpuno određen niz (a ne skup) $v_{n'} \in R$ sa svojstvom

$$v = \sum v_{n'} B_{n'};$$

v_x (odnosno $v_{n'}$) zove se koordinata od v u smjeru $x \in B$ (odnosno u smjeru $B_{n'}$). Specijalno za nula-vektor $\vec{0}$ iz V imamo

$$\vec{0} = \sum_{x \in B} 0 \cdot x.$$

Dokaz. Prema definiciji baze B, vrijedi $V = L(R, B)$; to znači da za svako $v \in V$, $v \neq \vec{0}$ postoji preslikavanje $x \to v_x \in R$ od B u R sa svojstvom da vrijedi (1) i da bude $v_x = 0$ svuda osim eventualno na konačnom dijelu od B, gdje je $v_x \neq 0$. Pa pretpostavimo da je također i $x \to v'_x$ preslikavanje od B u R s analognim svojstvom da je $v_x' \neq 0$ tek na konačnom ili pustom dijelu baze B. Tada je $\vec{0} = v - v' = \sum_{x \in B} v_x x - \sum_{x \in B} v'_x x$. No, ako je M množina svih $x \in B$ u kojima bar jedan od članova v_x, v'_x nije $= 0$, onda je M konačno i očigledno je gornja razlika $= \sum_{m \in M} (v_m - v'_m)\, m$, odakle je $\vec{0} = \sum_{m \in M} (v_m - v'_m)\, m$. Kako je M konačni dio baze B, M je *nezavisno*, pa posljednja jednakost ima za posljedicu $0 = v_m - v'_m$ za svako $m \in M$, što zbog $v_x = v'_x = 0$ za $x \in B \setminus M$ znači da je zaista $v_x = v'_x$ za svako $x \in B$.

4.5. Istobrojnost različitih baza u prostoru. Ravnina je dvodimenzionalna; *svaka baza* u njoj ima po *dva* člana; u prostoru R^{I3} *svaka* baza ima po *tri* člana, tj. ako su B, B' bilo koje *dvije* baze u običnom prostoru, onda skupovi B, B' imaju jednak broj članova. *Jedna od osnovnih činjenica o vektorskim prostorima koja zadire u algebru, geometriju itd. sastoji se u tom da isti iskaz važi za* ***svaki*** *vektorski prostor nad tijelom realnih ili kompleksnih brojeva.*

$\longrightarrow$ **4.5.1. Teorem. (osnovni teorem o istobrojnosti baza).** ***Neka je V bilo koji prostor (nad tijelom R ili R (i)); ako je $\dim V < \infty$, tada su bilo koje dvije baze prostora V istobrojne: one imaju isti broj članova. Svakih $n = \dim V$ linearno nezavisnih članova iz V čine bazu prostora pa se svaki član iz V na jednoznačan način prikazuje kao njihov linearan spoj.***

To je zaista fundamentalan teorem!

Dokaz. Čitalac može, pri dokazu, uvijek imati u mislima npr. ravninu umjesto V. Pa neka V ima upravo n dimenzijâ, dakle $\dim V = n \in N$. Tada po definiciji broja $\dim V$ postoji jedna baza $e = \{e_{n'}\}_{n'}$ upravo od n članova. Neka je $B = \{B_{s'}\}_{s'}$ bilo koja baza *istog* prostora V; s je broj članova u B; dakle je $s \geq \dim V$, tj. $s \geq n$. Treba dokazati da je $s = n$. To ćemo dokazati *postepenim smjenjivanjem* članova iz e članovima iz B.

Promatrajmo niz od $n+1$ člana:

$$(1) \qquad \underbrace{e_1, e_2, \ldots, e_{n'}, \ldots, e_n}_{\text{baza } e}, \underbrace{B_1}_{\text{prvi član baze } B}.$$

Uklonimo iz tog niza *prvi* član x koji *zavisi linearno od preostalih članova niza* (1); vrijedi $x \in e$, i preostalih n članova *opet je jedna baza* e' u kojoj je i član B_1 iz baze B. Stvarno, kako je e baza, to za vektor[1] B_1 imamo rastav

$$(2) \qquad B_1 = \sum_{n'} B_{1n'} \cdot e_{n'};$$

kako je B_1 član jedne baze, naime baze B, to je $B_1 \neq \vec{0}$; znači da je bar jedna komponenta $B_{1n'} \neq 0$.

Neka je k prvi broj $\leq n$ za koji je $B_{1k} \neq 0$; tada iz rastava (2) možemo izraziti vektor e_k pomoću članova iz $e \setminus \{e_k\} \cup \{B_1\}$; dakle

$$(3) \qquad e_k = B_k - \sum_r \frac{B_{1r}}{B_{1k}} e_r \qquad (r \leq n,\ r \neq k).$$

Dakle je e_k izbačeni vektor x. Dokažimo još da preostali članovi u (1) čine bazu, tj. da zamjenom u bazi e vektora e_k s vektorom B_1 dobijemo opet bazu. Stvar izlazi neposredno iz (3). Naime, kako je za proizvoljan vektor v iz V na snazi rastav

$$(4) \qquad v = \sum_{n'} v_{n'} e_{n'},$$

to unošenjem izraza $(3)_2$ za vektor e_k u (4) dobijemo rastav vektora v po vektoru B_1 i vektorima $e_{n'} \neq e_k$.

[1] U konkretnom slučaju „vektor" B_1 može biti geometrijski vektor, niz, jednadžba, funkcija, matrica, ...

Time smo dokazali da vrijedi ova:

4.5.1.2. Lema. *Neka je e bilo koja baza prostora* V i $x \in e$; *neka je* v *neki član* $\neq \vec{0}$ *iz* V, *sa svojstvom da* v *u smjeru* x *ima komponentu* $\neq 0$; *tada je skup* $e \setminus \{x\} \cup \{v\}$ *opet baza u prostoru.*

Dovršimo gornji dokaz. Izbacivanjem prvog zavisnog člana u (1) dobije se iz (1) određen niz e' od n članova; pripišimo tome nizu naredni član B_2 baze B; u nastalom nizu od $n+1$ člana provedimo isto razmatranje kao maloprije: izbacimo *prvi zavisni* član! Preostaje određen niz e'' od n članova sa B_1, B_2 kao dva posljednja člana, itd. Poslije n koračaja doću ćemo istim postupkom do određenog niza $e^{(n)}$ koji je upravo n-člani niz $(B_{n'})_{n'}$; taj niz $e^{(n)} = (B_{n'})_{n'}$ kao i nizovi $e^{(i)}$ kod drugih koračaja čini bazu. To znači da je $n = s$, jer bi inače bilo $n < s$ pa bi npr. član B_{n+1} baze B zavisio linearno od članova $B_1, \cdots, B_n$ jer ovi članovi tvore bazu $e^{(n)}$ prostora V; međutim, svi vektori svake baze linearno su nezavisni; zato B_{n+1} ne postoji pa je zaista $n = s$.

Istobrojnost baza je dokazana.

Idemo dalje! Pa neka je M bilo koja množina od $n = \dim V$ linearno nezavisnih vektora; tada je M baza u V; u obrnutom slučaju skup $V \setminus L(R, M)$, bio bi pun tj. neprazan; izabirući iz njega neki član i dovodeći ga u M, dobili bismo skup $M' \supsetneq M$; i skup M' je nezavisan, a ima već $n+1$ član; očigledno se proces može nastaviti, pa ako M' još nije baza, možemo M' proširiti i doći najzad do neke baze $S \supset M'$. No, baza S imala bi bar $n+1$ član, protivno dokazanoj istobrcjnosti baza.

Posljednji dio rečenice u teoremu 4.5.1. sadržan je u teoremu 4.4.2.

Time je osnovni teorem 4.5.1. potpuno dokazan.

4.5.1.3. Primjer. U § 1.4. riješili smo niz od 4 linearne homogene jednadžbe sa 7 nepoznanica i dokazali da sva rješenja čine prostor od 5 dimenzija. Pet „vektora", tj. 5 rješenja navedenih tamo pod šifrom (4), obrazovali su bazu. A sada znamo da ***svakih*** *5 nezavisnih rješenja čine bazu i da svaka baza ima upravo 5 članova.*

To je *znatno preciziranje u savladavanju stvarnosti*!

4.5.2. Teorem o izgradnji baze. *Neka je* (1) $M = v_1, \cdots v_m$ *bilo koji niz od* m *linearno nezavisnih vektora prostora* V; *ako je* $m < \dim V$, *tada postoji baza e prostora koja proširuje skup* M, *a dobije se tako da se nizu* (1) *priklopi bilo koji niz od* $n-m$ *članova iz* V *koji su linearno nezavisni od vektora* (1), *tj. leže u* $V \setminus LM$, *a također su linearno nezavisni međusobno.*

Dokaz. Kako je $m < \dim V$, postoji bar jedan vektor $v_{m+1} \in V$ koji je nezavisan od M, tj. $v_{m+1} \in V \setminus LM$; radeći dalje sa $M_1 = v_1, v_2, \cdots, v_m, v_{m+1}$ kao što smo upravo radili sa M, pa ako je $m+1 < \dim V$, doći ćemo na sličan način do $v_{m+2} \in V \setminus LM_1$ itd.; nakon $n-m$ koračaju doći ćemo tako do niza $v_1, v_2, \cdots v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_n$ od n linearno nezavisnih vektora prostora V od n dimenzija; taj n-člani niz čini bazu prostora V (v. teor. 4.5.1.).

4.6. Izomorfizam vektorskih prostora. — 4.6.0. Priprava. Bili smo iznenađeni saznanjem na kako se *raznovrstan način* mogu pojaviti vektorski prostori, a time i vektori (isp. primjere u § 3.3). Sad ćemo, međutim, spoznati drugu stranu medalje. Kao što se *pojedini broj* može pojaviti u *raznim* situacijama (npr. broj 2 kao dva oka, dva oraha, dvije dužine, itd.), tako se i pojedini *vektorski prostor* može pojaviti u naoko *raznim*, no *sličnim* vidovima. Tako ćemo npr. vidjeti da je svaki vektorski prostor dimenzije 2 (nad tijelom R) „sličan" ili „izomorfan" s prostorom R^2 svih dvočlanih nizova u R.

Zaključak je općenit.

⟶ **4.6.1.** Teorem. *Neka su* V, V' *dva vektorska prostora nad tijelom* R; *ako je* $\dim V = \dim V' = n < \infty$, *tada su prostori* V, V' *izomorfni, tj, postoji tolikovanje* t[1] *(bijekcija)*: $x \to tx$ prostora V na V' s *ova dva svojstva*:

L_1 $$t(x+y) = tx + ty \quad \text{za svako} \quad x, y \in V$$

L_2 $$t(\lambda x) = \lambda tx \quad \text{za svako} \quad \lambda \in R \text{ i } x \in V.$$

Specijalno, oba prostora V, V' *izomorfna su s prostorom* R^n *svih n-članih nizova s vrijednostima u* R (tj. R^n je skup svih jednoznačnih funkcija od $1(n)$ ka R, pri čemu je adiranje u R^n i množenje između elemenata iz R i onih iz R^n definirano na svagdašnji način)[2].

4.6.2. Sam teorem možemo ilustrirati „prostorom" rješenjâ npr. jednadžbe $2x - 3y + 5z = 0$. Prostor rješenja izomorfan je s ravninom (pa ta zadana jednadžba je slika ravnine!).

4.6.3. Dokaz teorema **4.6.1.** Neka je e baza u V a e' u V'; kako je $\dim V = \dim V' = n$, to prema teoremu 4.5.1. baze e, e' imaju svaka po n elemenata; pa neka je $e = \{e_\nu\}_\nu$, $e' = \{e'_\nu\}_\nu$; tu $\nu \in 1(n)$. Definirajmo sada funkciju t od e na e' zahtjevom $te_\nu = e'_\nu$. *Proširimo* t s baze e na čitav prostor V na *prirodan način*: neka je $v \in V$; tada je, prema teoremu o jednoznačnosti 4.4.2 moguće na *jedan jedini* način pisati

$$v = \sum_\nu v_\nu e_\nu.$$

Definirajmo tv relacijom

$$t\left(\sum_\nu v_\nu e_\nu\right) = \sum_\nu v_\nu t e_\nu.$$

Time je t definirano na *jednoznačan* način u čitavu prostoru V; no t je i *jednolisno*: ako je $v \neq u$ u V, tada je $tv \neq tu$; stvarno, iz $v \neq u$ izlazi $v_k \neq u_k$ za bar jedno $k \leq n$; dakle je i $v_k e'_k \neq u_k e'_k$ tj. $v_k te_k \neq u_k te_k$, dakle i $tv \neq tu$.

Dokažimo da su ispunjeni uslovi L_1 i L_2.

Pa neka je $x, y \in V$; tada je

$$x = \sum_\nu x_\nu e_\nu, \; y = \sum_\nu y_\nu e_\nu; \qquad \text{odatle} \qquad (x+y) = \sum_\nu (x_\nu + y_\nu) e_\nu;$$

po definiciji (1) imamo odatle

$$f(x+y) = t\,\Sigma (x_\nu + y_\nu) e_\nu = \Sigma (x_\nu + y_\nu)\, te_\nu = \Sigma (x_\nu + y_\nu)\, e'_\nu = \Sigma\, x_\nu e'_\nu + \Sigma\, y_\nu e'_\nu =$$
$$= \Sigma\, x_\nu te_\nu + \Sigma\, y_\nu te_\nu = t\,\Sigma\, x_\nu e_\nu + t\,\Sigma\, y_\nu e_\nu = tx + ty.$$

---

[1] tj. obostrano jednoznačno preslikavanje.

[2] Možemo reći da je R^n „obični euklidski prostor od n dimenzijâ" nad tijelom R.

Analogno:

$$t(\lambda x) = t(\lambda \Sigma x_\nu e_\nu) = t \Sigma \lambda x_\nu e_\nu = \Sigma \lambda \, x_\nu t e_\nu = \lambda \Sigma x_\nu t e_\nu =$$
$$= \lambda t \Sigma x_\nu e_\nu = \lambda t x, \quad \text{tj.} \quad t(\lambda x) = \lambda t x$$
$$\text{za svako } \lambda \in R \text{ i svako } x \in V.$$

Time je izomorfizam prostorâ V, V' dokazan.

Još se radi o onom dodatku za prostor R^n; ovaj prostor ima n dimenzija, jer su redići e_ν jedinične matrice 1_n nezavisni članovi u R^n, u jednu ruku; u drugu ruku, za svaki član $x = (x_\nu) \in R^n$ očigledno je

$$x = x_1(1, 0, 0, \cdots) + x_2(0, 1, 0, \cdots) + \cdots =$$
$$= \sum x_\nu e_\nu, \quad \text{tj.} \quad L(R, \{e_\nu\}_\nu) = R^n.$$

Dakle redovi (odnosno stupci) matrice 1_n obrazuju bazu prostora R^n. Teorem 4.6.1. je potpuno dokazan.

4.6.4. O homogeno-linearnim preslikavanjima vektorskih prostora.

Linearno preslikavanje t linearnog prostora u linearan prostor je svako preslikavanje t za koje vrijede gornji uslovi L_1 i L_2.

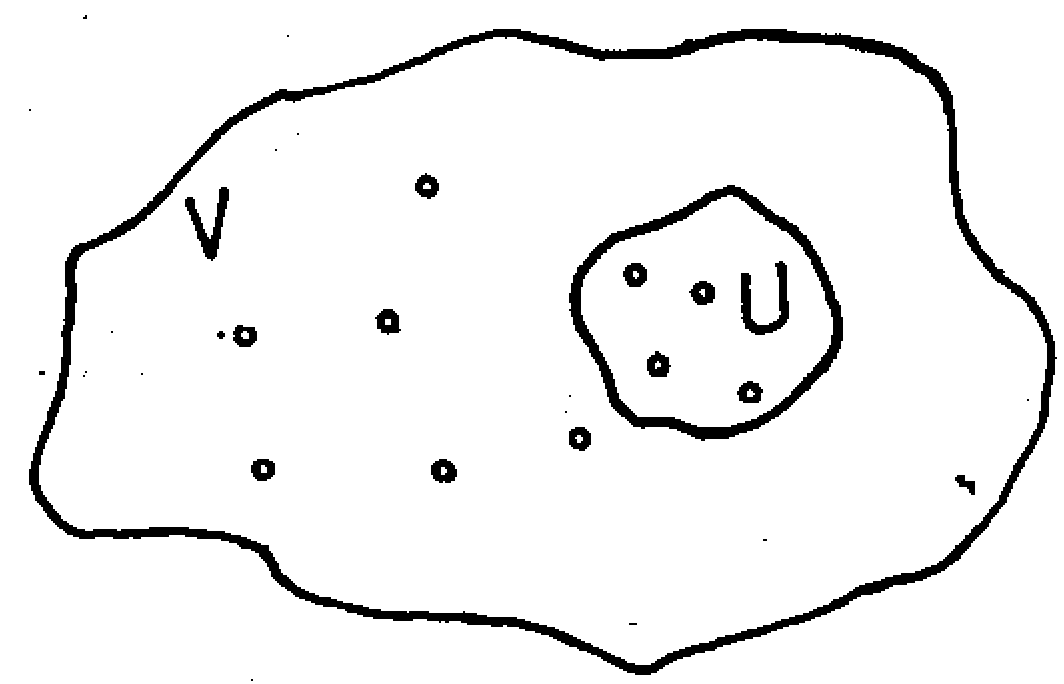
U toku dokazivanja u 4.6.3. dokazali smo i ovaj rezultat:

L e m a. *Linearno preslikavanje vektorskog prostora V potpuno je određeno poznavajući njegove vrijednosti u jednoj bazi prostora.*

4.6.5. Primjedba o osnovnom teoremu o istobrojnosti baza. Kako je taj teorem „istinit“ za euklidske prostore R^n, to iz izomorfije prostora R^n i prostora V, za koji je $\dim V = n$, izlazi da je teorem o istobrojnosti baza istinit i za V.

4.7. Osnovni teorem o vektorskom prostoru, bazama, potprostoru i njegovu komplementu. — 4.7.0. Ideja vodilja. Neka su p i q dvije pravulje (pravca) koje se sijeku; neka nam njihovo sjecište služi kao nula (0) za računanje; ravnina R^2 što je određuju pravulje p i q izlazi kao množina svih suma $p^\cdot + q^\cdot$; svaka tačka ravnine predočena je na jedan jedini način u tom obliku.

Kaže se da je ravnina R^2 direktna suma pravuljâ p i q i piše $R^2 = p + q$.



Sl. 13.4.7. Članovi baze V i podbaze U markirani su tačkicama

4.7.1. Osnovni teorem o vektorskim prostorima, podbazama i potprostorima. ***Neka je $V = V_n(K)$ proizvoljan vektorski prostor nad tijelom K, i***

(1) $$e = (e_1 \, e_2 \ldots e_n)$$

proizvoljna baza toga prostora; svaki podskup e° od e razapinje određen podprostor $U = Le^\circ$ prostora V; posebno, ako je e° pravi podskup od e, tada prostor Le°

što ga rađa e° i prostor $U' = LCe^\circ$ što ga rađa skup $Ce^\circ = e \setminus e^\circ$ imaju svojstvo da je svako $v \in V$ predočivo na jedan jedini način u obliku

(2) $$v = v_u + v_{u'} \quad \textit{pri čemu} \quad v_u \in U, \quad v_{u'} \in U'.$$

2. Kaže se da je V *direktna suma prostorâ* U, U' i piše

(3) $$V = U \dot{+} U';$$

kaže se također da je U' *direktni komplement potprostora U u odnosu na prostor V*. Vrijedi

(4) $$U \cap U' = \{\vec{0}\} \text{ te (4')} \quad \dim V = \dim U + \dim U'.$$

D o k a z. Neposredno se provjerava da je Le° određen vektorski prostor i da je $\dim Le^\circ = ke^\circ$ ($=$broj članova u e°).

Isto tako

$$\dim LCe^\circ = k(e \setminus e^\circ) = ke - ke^\circ = \dim V - \dim Le^\circ.$$

Za zadanu bazu (1) prostora V, i za svako $v \in V$ imamo posve određen rastav

(5) $$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^n e_n,$$

gdje su $v^\nu \in K$ članovi tela K; neka e° kao podniz od niza e glasi

(6) $$e^\circ = e_{i_1} e_{i_1} \cdots e_{i_m};$$

neka preostatak niza e glasi

(7) $$e_{j_1} \cdots e_{j_r};$$

tada, na osnovu zakona obrtanja i združivanja, iz (5) izlazi

(8) $$v = (v^{i_1} e_{i_1} + v^{i_2} e_{i_2} + \cdots + v^{i_m} e_{i_m}) + (v^{j_1} e_{j_1} + \cdots v^{j_r} e_{j_r}).$$

Vektor u prvoj zagradi je član u prostoru Le°; vektor u drugoj zagradi je član prostora LCe°; oba ta vektora određena su jednoznačno jer su jednoznačno određeni: rastav (5) i e° kao podniz (6) te Ce° kao podniz (7).

Nula-vektor $\vec{0}$ je svakako zajednički član od Le° *i* Ce°, međutim, to je i jedini zajednički član tih dvaju prostora. Stvarno, iz $v \in Le^\circ \cap LCe^\circ$ izlazi zbog $v \in Le^\circ$ prikaz

$$v = \sum_{\mu=1}^{m} x^\mu e_{i_\mu}$$

u bazi (6), *a* zbog $v \in LCe^\circ$ izlazi prikaz

$$v = \sum_{\rho=1}^{r} y^\rho e_{i_\rho} \text{ u bazi (7).}$$

Iz jednakosti

$$\sum_\mu x^\mu e_{i_\mu} = \sum_\rho y^\rho e_{i_\rho} \text{ odnosno}$$

$$\sum x^\mu e_{i_\mu} - \sum y^\rho e_{i_\rho} = \vec{0} \text{ i činjenice da su } e_{i_\mu}, e_{i_\rho}$$

članovi baze e samog prostora V izlazi (zbog linearne nezavisnosti članova baze) da su koeficijenti $=0$, tj.

$$x^{\mu}=0=y^{\rho} \text{ pri } \mu\in 1(m),\ \rho\in 1(r).$$

A to upravo znači da je $v=\vec{0}$, što se tvrdi relacijom (4).

Na sličan se način dokazuje

4.7.2. Teorem. *Neka je vektorski prostor $V=V_n(K)$ dimenzije $n<\infty$; neka je V direktna suma svojih potprostora U_1, U_2 u smislu da je svaki $v\in V$ predočiv na jedincat način kao*

$$v=v_{u_1}+v_{u_2} \text{ pri } v_{u_i}\in U_i \ (i=1,2);$$

ako je $e^{(i)}$ vektorska baza u prostoru U_i $(i=1,2)$, tada je $e^{(1)}\cup e^{(2)}$ vektorska baza samog prostora $V=U_1+U_2$:

$$L(e^{(1)}\cup e^{(2)})=V; \text{ posebno je}$$
$$\dim V=\dim U_1+\dim U_2.$$

(kaže se također da je v_{u_1} projekcija na potprostor U_1 vektora $\vec{v}$ u smjeru potprostora U_2).

Kao poseban slučaj teorema 4.7.2. imamo

4.7.3. Teorem. *Neka je $V=V_n(K)$ proizvoljan prostor konačne dimenzije: neka je e vektorska baza prostora V, a U potprostor od V. Ako baza e ima izvan U najviše $\dim V-\dim U$ članova tj. ako je*

(1) $$k((V\setminus U)\cap e)\le \dim V-\dim U,$$

tada je $e\cap U$ baza potprostora U; posebno je tada

(2) $$L(e\cap U)=U,\ \dim U=k(e\cap U)$$

(3) $$\dim V=k(e\cap U)+k(e\cap(V\setminus U)).$$

Naime iz identiteta

(4) $e=(e\cap U)\cup(e\setminus(V\setminus U))$ i mimoilaznosti (disjunktnosti) tih dvaju sastojaka izlazi

$$(V=)\,Le=L(e\cap U)+L(e\cap(V\setminus U)), \text{ a odatle}$$

(5) $$\dim V=\dim L(e\cap U)+\dim L(e\cap(V\setminus U)) \text{ i dalje obrazac (3).}$$

Iz (1), (4) i očigledne relacije $\dim L(e\cap U)\le \dim U$ izlazi tražena jednakost (2).

Primjedba. Bez uslova (1) zaključak (2) ne mora stajati: dovoljno je posmatrati euklidski prostor $V=R^3$, bazu $e=(e_1, e_2, e_3)$ i potprostor-pravulju U kroz O na kojoj ne leži ni jedan od vektora e_1, e_2, e_3; tada je $e\cap U=\varnothing$ pa $e\cap U$ nije baza od U.

4.8. Zadaci o vektorskim prostorima. Zadani su ovi „vektori"; jesu li i kako su međusobno linearno zavisni ili uopće nisu međusobno linearno zavisni:

0. brojevi $3,\ 4$?
1. kompleksni brojevi $1+2i,\ 1-3i$?
2. kompleksni brojevi $3-2i,\ 4+5i,\ -3-i$?