POGLAVLJE 11.

DETERMINANTA ZADANE MATRICE. GLAVNA SVOJSTVA DETERMINANATA

1. UVODNA RAZMATRANJA

Uz matricu su vezani razni pojmovi i razna svojstva. Jedan od vrlo važnih pojmova vezanih za matricu jesu *vektori* (stupci) matrice te *determinanta* matrice (za kvadratne matrice a kao „volumen" kvadra što ga određuju *stupci* matrice). Na taj način dolazimo do pridruživanja $a \rightarrow \det a$.

Važna primjedba. Imajmo na umu da pri pridruživanju $a \rightarrow \det a$ imamo određenu funkciju pa $\det a$ zavisi u isto vrijeme: i od matrice a i od svih vektorâ-stupaca $a_{.1}, a_{.2}, \ldots$ i od svih vektora-redaka $a_{1.}, a_{2.}, \ldots$ i od svih vrijednosti (komponenata $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$). Specijalno je korisno shvatiti $\det a$ kao funkciju stupaca ili vektorâ $a_{.1}, a_{.2}, \ldots$ pa $\det[a_{.1}, a_{.2} \ldots]$ pokazuje kako volumen kvadra zavisi od osnovnih bridova $a_{.1}, a_{.2}, \ldots$ Prema tome $\det[a_{.1}, a_{.2}, \ldots]$ je funkcija od n argumenata (varijabli) $a_{.1}, a_{.2}, \ldots$ i te su varijable vektori $a_{.1}, a_{.2}, \ldots$

Uvjerit ćemo se da je za matricu a bitno da li je $\det a = 0$ ili $\det a \neq 0$.

1.0. Definicija. **Regularne i singularne matrice.** *Konačna kvadranta matrica* (odnosno *determinanta* $\det a$) je *neregularna* (singularna) ili *regularna*, već prema tome da li je $\det a = 0$ ili $\det a \neq 0$.

Determinantu $\det a$ za slučaj kvadratnih matrica oblasti (n, n) za

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

definirali smo u pogl. 9, § 3. ovako:

$$\det a = \sum_p (-1)^{ip} \, a_{p_1 1} \cdot a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n},$$

pri čemu p prolazi skupom svih permutacija množine $1(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sad ćemo dokazati neka važna svojstva determinanata. Pri tom je vrlo korisno imati na umu specijalno matrice, odnosno determinante reda 2, jer su one vrlo jednostavne, a u drugu ruku mnoga svojstva determinanata se izriču nezavisno od njihova reda. Nadalje je vrlo korisno imati na umu i *geometrijsko* *značenje* determinante kao *mjere* za sadržinu orijentiranog kvadra kojemu se *vektori osnovnih bridova* što izlaze iz jednog vrha podudaraju sa *stupcima matrice* (isp. poglavlje 9, § 1.10).

Imajmo na umu činjenicu da $\det a$ zavisi od n vektorâ $a_{.1}, a_{.2}, \ldots a_{.n}$; ispitat ćemo kakva je to funkcija!

1.1. *Determinanta dijagonalnih kvadratnih matrica i trokutastih matrica.* Neka je *a dijagonalna kvadratna matrica* poretka (n, n); to znači da je $a_{ij}=0$ za $i \neq j$. Posmatrajmo opći član u $\det a$; on glasi:

$$(-1)^{Ip} a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{p_3 3} \ldots,$$

gdje p prolazi permutacijama množine $1(n)$. No ako je p različito od identičke permutacije, onda je za bar jedno $e \leq n$, $p_e \neq e$, a time $a_{p_e e}=0$, pa odgovarajući član u $\det a$ iščezava. To znači da je $\det a = a_{11} a_{22} \ldots$; tako smo dokazali

1.2. Teorem. *Determinanta dijagonalne matrice jednaka je produktu vrijednosti na dijagonali te matrice.*

1.2.1. Korolar. *Determinanta svake jedinične matrice je* 1.

Npr. $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 360.$$

Isto tako se dokazuje

1.3. Teorem. *Determinanta svake konačne kvadratne trokutaste matrice jednaka je produktu članova na dijagonali.*

Uistinu, neka je a kvadratna matrica poretka (n, n), gdje je n prirodni broj; prema pretpostavci a je trokutasta matrica, tj.

(*) $$a_{ej}=0 \text{ za } e>j.$$

Pa neka je

(1) $$(-1)^{Ip} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \ldots$$

neki član od $\det a$ koji je $\neq 0$. Zbog pretpostavke (*) mora biti

$$p_1 \leq 1, \qquad p_2 \leq 2, \ldots;$$

odatle po redu izlazi $p_1=1$, $p_2=2$ (jer $p_1 \neq p_2$), $p_3=3$ (jer je $p_3 \neq p_2$) itd.

Dakle se permutacija p svodi na identičku permutaciju množine $1(n)$, a to upravo znači da je član (1) produkt vrijednosti na dijagonali.

2. Determinanta je alternirajuća funkcija svojih vektora (stupaca).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix},$$ općenito:

2.1. Teorem. *Determinanta kvadratne matrice je alternirajuća funkcija stupaca (vektora) te matrice.*

Drugim riječima: *Ako u kvadratnoj matrici dva njena stupca zamijene svoja mjesta, determinanata prelazi u suprotno-jednaku.* Npr. (zamjena $2 \rightleftarrows 1$)

$$\det[a_{.1}, a_{.2}, a_{.3}\ldots] = -\det[a_{.2}, a_{.1}, a_{.3}, \ldots].$$

Govoreći geometrijski: permutiraju li se dva osnovna brida u kvadru, sadržina se kvadra ne mijenja, ali mu orijentacija prelazi u suprotnu.

Recimo da se radi o matrici a sa stupcima $a_{.1}, a_{.2}, \ldots$

Recimo da stupci $a_{.1}, a_{.2}$ zamijene svoja mjesta. Neka je b ta nova matrica; za nju je dakle

$$(1) \qquad b_{.1} = a_{.2},\ b_{.2} = a_{.1},\ \text{te}\ a_{.j} = b_{.j}\ \text{za}\ j > 2.$$

Permutaciji $p = p_1 p_2 \ldots$ množine $1(n)$ odgovara ovaj član $b(p)$ u $\det b$:

$$b(p) = (-1)^{ip} b_{p_1 1}\, b_{p_2 2} \ldots\, b_{p_n n}.$$

Zbog (1) to je dalje jednako

$$(2) \qquad b(p) = (-1)^{ip} a_{p_1 2}\, a_{p_2 1}\, a_{p_3 3} \cdots = (-1)^{ip}\, a_{p_2 1}\, a_{p_1 2}\, a_{p_3 3} \cdots$$

U indeksima se tu pojavljuje permutacija $p' = p_2 p_1 p_3 \cdots p_n$ koja iz p nastaje transpozicijom prvih članova p_1, p_2. No, transpozicijom članova u permutaciji mijenja se broj inverzija za neparan broj (isp. pogl. 3, § 8.6.2): to znači da je $ip' = ip \pm$ neparno, dakle

$$(-1)^{ip'} = -(-1)^{ip}.$$

Unesemo li odatle $(-1)^{ip}$ u (2), dobijemo

$$b(p) = -(-1)^{ip'}\, a_{2p_1}\, a_{p_1 2}\, a_{p_3 3} \ldots,\ \text{tj.}\ b(p) = -a(p'),$$

gdje je $a(p')$ član determinante a što odgovara permutaciji p'. No, kad p prolazi kroz skup $1(n)!$ svih permutacija od $1(n)$, prolazi također p' kroz $1(n)!$ pa je zato

$$\det b = \sum_p b(p) = -\sum_{p' \in 1(n)!} a(p') = -\det a.$$

Sasvim se slično dokazuje stvar ako koja god dva susjedna stupca zamijene svoja mjesta. A odatle izlazi teorem za transpoziciju bilo kojih dvaju stupaca — bili oni susjedni ili ne bili.

2.2. Korolar: *Ako kvadratna matrica ima dva jednaka stupca, onda je ona singularna*, tj. $\det a = 0$.

Stvarno transpozicijom tih dvaju jednakih stupaca *matrica se ne mijenja*; dakle se ne mijenja ni determinanta $\det a$; no prema teoremu 2.1. prelazi $\det a$ u $-\det a$; dakle je $\det a = -\det a$; odatle izlazi da je $\det a = 0$.

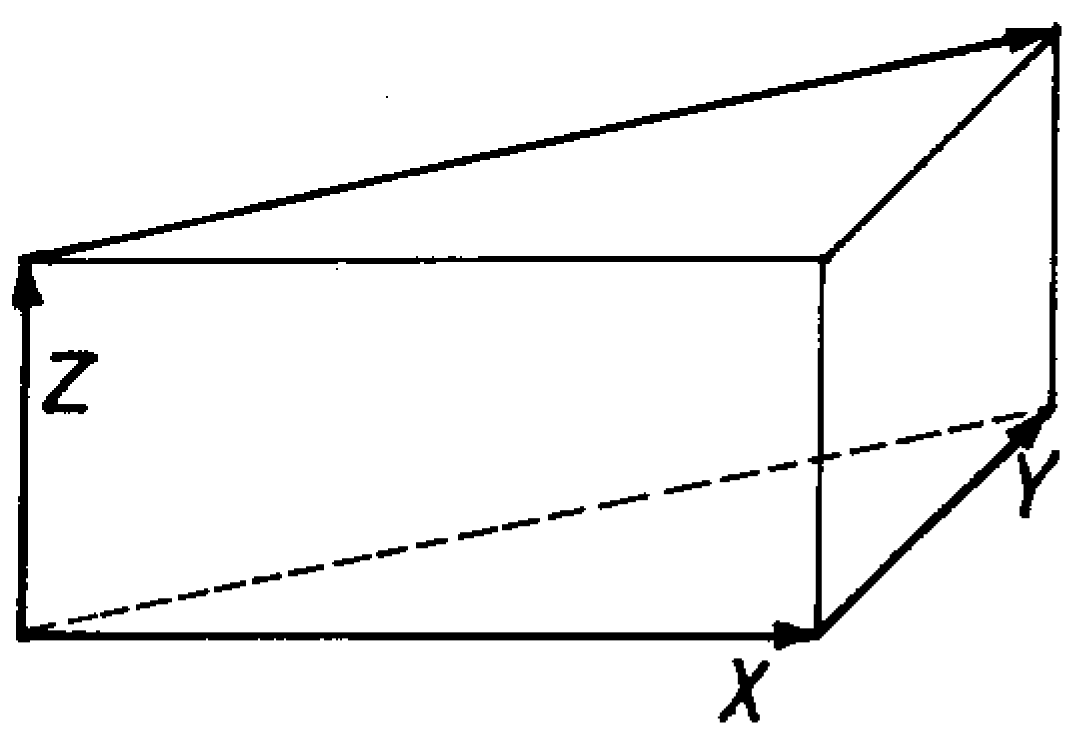
3. DETERMINANTA JE LINEARNO-HOMOGENA FUNKCIJA SVAKOG SVOJEG VEKTORA (STUPCA)

3.1. Lema. *Pomnoži li se neki stupac determinante nekim izrazom, množi se tim izrazom i sama determinanta.*

Geometrijski: Ako u nekom kvadru jedan osnovni brid pomnožimo sa c, pomnoži se sa c i mjera kvadra.

Dokaz. Neka je npr. $b_{.1} = c \cdot a_{.1}$, $b_{.j} = a_{.j}$ za $j > 1$; tada svaki član u $\det b$ sadrži kao faktor: c kao i jedan član od $\det a$; dakle je $\det b = c \cdot \det a$.

3.2. Lema. $\begin{vmatrix} x+x' & y \\ u+u' & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y \\ u' & v \end{vmatrix}$, tj.



Sl. 11.2.

ako je jedan stupac determinante suma od dva niza, tada je determinanta jednaka sumi od odgovarajuće dvije determinante koje se iz zadane dobiju tako da se odgovarajući stupac zamijeni prvim, odnosno drugim nizom. Drugim riječima: *Determinanta je aditivna funkcija svakog svojeg vektora.* Geometrijski:

$$\mathrm{Pl}(\vec{x}, \vec{z}) + \mathrm{Pl}(\vec{y}, \vec{z}) = $$
$$= \mathrm{Pl}(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z});$$

tu $\mathrm{Pl}(x, z)$ znači orijentiranu ploštinu kvadra što ga razapinju radijusvektori $\vec{x}, \vec{z}$.

Dokaz. Pa neka je matrica b takva da je npr.

$$b_{.1} = \vec{f} + \vec{g}, \quad b_{.j} = a_{.j} \text{ za } j = 2, 3, \ldots;$$

pri tom su $\vec{f}, \vec{g}$ dva stupca po n članova. Permutaciji $p \in 1(n)!$ odgovara u $\det b$ član

$$b(p) = (-1)^{ip}\, b_{p_1 1}\, b_{p_2 2} \ldots, \text{ tj.}$$

$$\sum_p b(p) = \sum_p (-1)^{ip} (f_{p_1} + g_{p_1})\, b_{p_2 2} \ldots = \sum_p (-1)^{ip} f_{p_1} a_{p_2 2} \ldots +$$
$$+ \sum_p (-1)^{ip} \cdot g_{p_1} a_{p_2 2} \ldots = \det[\vec{f}, a_{.2}, a_{.3} \ldots] + \det[\vec{g}, a_{.2}, a_{.3} \ldots].$$

Kombinirajući prethodna dva rezultata, imamo ovaj teorem:

3.3. Teorem. *Determinanta je homogeno-linearna funkcija svakog svojeg vektora.*

Tako npr.

$$\begin{vmatrix} 2\cdot5-3\cdot2, & 2, & 3 \\ 2\cdot7-3\cdot1, & 4, & 5 \\ 2\cdot4-3\cdot5, & 8, & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix}.$$

3.3.1. Primjer. Nađite determinantu produkta kvadratnih matrica tipa (2. 2). Neka su zadane matrice

$$a=\begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$ab=\begin{bmatrix} pu+qx & pv+qy \\ su+tx & sv+ty \end{bmatrix};$$

dakle je

$$\det(ab)=\begin{vmatrix} pu+qx & pv+qy \\ su+tx & sv+ty \end{vmatrix}=(\text{shvaćajući prvi stupac kao sumu})$$

$$=\begin{vmatrix} pu & pv+qy \\ su & sv+ty \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qx & pv+qy \\ tx & sv+ty \end{vmatrix}=(\text{shvaćajući druge stupce kao sume})$$

$$=\begin{vmatrix} pu & pv \\ su & sv \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} pu & qy \\ su & ty \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qx & qv \\ tx & sv \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qx & qy \\ tx & ty \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{(izlučujući faktore iz poje-} \\ \text{dinih stupaca)}\end{array}\right.$$

$$=u\begin{vmatrix} p & p \\ s & s \end{vmatrix}v+u\begin{vmatrix} p & q \\ s & t \end{vmatrix}y+x\begin{vmatrix} q & p \\ t & s \end{vmatrix}v+x\begin{vmatrix} q & q \\ t & t \end{vmatrix}y=0+u\det a\cdot y—x\det a\cdot v+0$$

$$=\det a\cdot(uy—vx)=\det a\cdot\det b, \quad \text{tj.} \quad \det(a\cdot b)=\det a \ \det b.$$

Analogan zaključak vrijedi za konačne kvadratne matrice uopće (teorem 9.2).

4. TRI KARAKTERISTIČNA SVOJSTVA DETERMINANATA

Rezultate iz prethodna tri paragrafa možemo skupiti zajedno pa tako spoznajemo da za kvadratne konačne matrice $x=[x_{.1}, x_{.2}, \ldots]$ pridruživanje

(1) $$x \to \det x \text{ odnosno } [x_{.1}, x_{.2}, \ldots] \to \det[x_{.1}, x_{.2}, \ldots]$$

ima ova tri svojstva:

1. *Determinanta matrice je alternirajuća funkcija stupaca* (vektorâ) (vidi teorem 2.1),

2. *Determinanta matrice je homogeno-linearna funkcija od svakog svojeg vektorskog argumenta* (teorem 3.3).

3. *Determinanta jedinične matrice je* 1 (korolar 1.2).

Zanimljivo je da su ta tri svojstva *i dovoljna da okarakteriziraju funkciju* (1) *u skupu kvadratnih konačnih matrica.* (K. Weierstrass).

Stvarno, neka je a proizvoljna matrica poretka (n, n), $n \in N$; tada je

$$a=[a_{.1}, a_{.2}, a_{3} \cdots];$$

no za svaki vektor $a_{.j}$ matrice a vrijedi

$$a_{.j} = a_{1j} e_1 + a_{2j} e_2 + \cdots + a_{ij} e_i + \cdots,$$

gdje je

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}\right\} i. \\ \vphantom{0} \end{matrix}$$

Na taj način imamo ovaj prikaz matrice

(2) $$a = [a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \cdots + a_{i1} e_i + \cdots,\ a_{12} e_1 + a_{22} e_2 \cdots, \cdots].$$

Tu se pojavljuju sve vrijednosti a_{ij} matrice a. Uzmimo sada u prikazu (2) iz prvog stupca $a_{.1}$ jedan član, recimo član $a_{p_1 1} e_{p_1}$; neka je isto tako $a_{p_2 2}\ e_{p_2}$ jedan član u $a_{.2}$ itd. Za svaki n-član niz $p = p_1, p_2, p_3, \ldots$ brojeva iz $1\,(n)$ možemo promatrati determinantu

(3) $$|\ a_{p_1 1} e_{p_1},\ a_{p_2 2} e_{p_2}, \ldots\ |.$$

Ona je prema lemi 3.1. jednaka

(4) $$a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots\ |\ e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots\ |.$$

No, kod nizova p možemo se ograničiti na one bez jednakih članova, jer ako u nizu $p_1, p_2, \cdots$ ima *jednakih* članova, tada je determinanta u (4) ednaka 0 (v. korolar 2.2). Ostaje, dakle, slučaj da među n brojeva $p_1, p_2, \cdots$ iz $1\,(n)$ nema jednakih; to znači da je $p \in 1\,(n)!$. Tada je očigledno

$$|\ e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots\ | = (-1)^{ip}\ |\ e_1,\ e_2,\ e_3, \cdots\ |.$$

No prema korolaru 1.2. imamo

$$|\ e_1,\ e_2 \cdots\ | = 1.$$

Na taj način determinanta, (4), odnosno (3), postaje

(5) $$(-1)^{ip}\ a_{p_1 1}\ a_{p_2 2} \cdots$$

No, prema teoremu 3.3. suma svih determinanata (3) je $= \det a$. Dakle je prema (4) i (5) zaista

(6) $$\det a = \sum_{p \in 1\,(n)!} (-1)^{ip} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots$$

A (6) je u pogl. 6, § 3. bila upravo definiciona formula za det a.

5. TRANSPONIRANJEM KVADRATNE MATRICE NE MIJENJA SE DETERMINANTA

Dosad smo ispitivali svojstva determinante u zavisnosti od njenih *stupaca*. Sad ćemo dokazati da analogna svojstva postoje i u pogledu *redaka*. Naime, transpozicijom $a \to a^T$ postaju reci ili redići stupcima, a stupci rečima. Pri tom, općenito, *matrica se mijenja*; naprotiv, *determinanta se ne mijenja*. Dokazat ćemo, naime, da vrijedi

—→ **5.1.** Teorem

$$\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix},$$

tj. $\det a = \det a^T$ za matricu poretka (2, 2). Općenitije, *za svaku konačnu kvadratnu matricu a vrijedi*

$$\det a = \det a^T.$$

Permutira li se svaki redak s odgovarajućim stupcem determinanta se ne mijenja.

Dokaz. Neka je $b = a^T$; permutaciji p množine $1(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ odgovara član

(1) $$b(p) = (-1)^{ip} b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots$$

u $\det b$; no $b_{ij} = a_{ji}$ pa zato izraz $b(p)$ postaje

(2) $$b(p) = (-1)^{ip} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots$$

Tu se pojavljuje produkt $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots$; napišimo taj produkt tako da *drugi* indeksi budu po redu $1, 2, \cdots$; neka time *prvi* indeksi daju permutaciju q; dakle je

(3) $$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots = a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots$$

No, to *mijenjanje redoslijeda* faktora ima za posljedicu stanovit broj k transpozicijâ u permutaciji p, čime ona prelazi u identičku permutaciju kao i isto tolik broj k transpozicijâ u permutaciji $1(n)$, čime ona prelazi u permutaciju q; zato je $(-1)^{ip} = (-1)^k$, $(-1)^{iq} = (-1)^k$, tj.

(4) $$(-1)^{ip} = (-1)^{iq}$$

Na osnovu (3) i (4) daje (2) ovo:

$$b(p) = (-1)^{iq} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots$$

A to znači da je $b(p)$ član $a(q)$ u $\det a$ koji odgovara permutaciji q; no kad p prolazi kroz $1(n)!$, prolazi i q kroz $1(n)!$, pa je dakle

(5) $$\sum_p b(p) = \sum_q a(q).$$

No, po definiciji je $(5)_1 = \det b$, $(5)_2 = \det a$, pa zbog $b = a^T$ jednakost (5) daje traženu jednakost $\det a^T = \det a$.

5.2. Primjedba. Mada je tek za *neke* matrice a ispunjeno $a^T = a$, ipak je $\det a^T = \det a$ za *svaku* kvadratnu *konačnu* matricu.

Već i za slučaj $n=2$ dobiva se time pravilnost koja s obzirom na *geometrijsko* značenje determinante nije nipošto očigledna.

Kombinirajući teorem 2.1 i 5.1, dolazimo do ovog teorema:

5.3. Teorem. *Determinanta kvadratne matrice je alternirajuća funkcija svojih stupaca (redaka).*

5.4. Primjer. U kakvoj su vezi determinante matrica

$$a = [a_{.1},\ a_{.2},\ a_{.3}, \cdots],\quad [a_{.3},\ a_{.1},\ a_{.2},\ a_{.4}, \cdots]?$$

Transpozicijom stupaca $a_{.2}$, $a_{.3}$ prelazi matrica a u $[a_{.1},\ a_{.3},\ a_{.2},\ a_{.4} \cdots]$; ako ovdje transponiramo stupce $a_{.1}$, $a_{.3}$, dolazimo do matrice b; kako determinanta svaki put prelazi u suprotnu, znači da je:

$$\det [a_{.3}\, a_{.1}\, a_{.2} \cdots] = -\det [a_{.1}\, a_{.3}\, a_{.2} \cdots] = -(-\det a).$$

Na isti se način dokazuju ova dva teorema:

5.5. Teorem. *Ako u matrici a stupac (redak) x premjestimo kao početni stupac (redak), dobiva se matrica kojoj je determinanta* $=(-1)^x \det a$.

5.6. Teorem. *U matrici a promatrajmo redak $a_{i.}$ i stupac $a_{.j}$; premjestimo taj redak da postane prvi redak, a u rezultatu premjestimo stupac j tako da dođe na prvo mjesto; za dobivenu matricu b vrijedi ovo:*

$$\det b = (-1)^{i+j} \det a,$$

$$b_{11} = a_{ij}.$$

6. O POJEDNOSTAVLJENJU DETERMINANATA

6.1. Teorem. *Ako u determinanti koji stupac* (redak) *dodamo kojem drugom stupcu* (retku) *determinante, determinanta ne mijenja svoje vrijednosti. Isto vrijedi ako smo prethodno stupac* (redak) *koji smo dodavali pomnožili kakvim izrazom.*

Dokaz mu je kratak. Tako npr. ako u matrici a dvostruk stupac $a_{.3}$ dodamo stupcu $a_{.1}$, dobivamo matricu

$$[a_{.1} + 2\, a_{.3},\ a_{.2},\ a_{.3}, \ldots]$$

pa za pripadnu determinantu imamo

$$\det [a_{.1} + 2\, a_{.3},\ a_{.2}, \ldots] = \det [a_{.1}\ a_{.2} \ldots] + \det [2\, a_{.3}\ a_{.2}\ a_{.3}\ a_{.4} \ldots] =$$

$$= \det a + 2 \det [a_{.3}\ a_{.2}\ a_{.3}\ a_{.4} \ldots].$$

No, posljednja determinanta $=0$, jer ima dva jednaka stupca: prvi i treći. Teoremom 6.1. mnogo se služimo.