

TRIGONOMETRIJA

sa elementima

SFERNE TRIGONOMETRIJE

za gimnazije realke

Karljiković

BEOGRAD

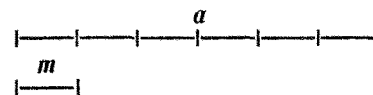
1935

У В О Д

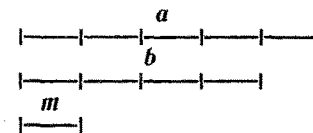
§ 1. **Размера двеју дужи.** Под *мером* једне дужи разумемо другу дуж која се садржава у првој два или више пута без остатка. Тако, дуж m (сл. 1) је мера дужи a , пошто се у a потпуно садржава 6 пута.

Под *заједничком мером* двеју дужи разумемо трећу дуж која се потпуно садржава у првој и другој дужи. Тако, дуж m (сл. 2) је заједничка мера дужи a и b , јер се она потпуно садржава у дужи a 5 пута, а у дужи b 4 пута.

Под *мерним бројевима* двеју дужи разумемо бројеве који нам показују колико се пута заједничка мера тих дужи



Сл. 1



Сл. 2

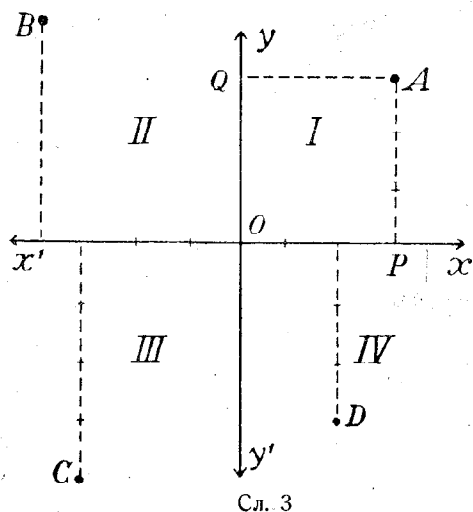
садржава у једној, а колико у другој дужи. Тако, код сл. 2 мерни је број дужи a 5, а дужи b 4. Под *размером* двеју дужи разумемо *размеру њихових мерних бројева*. Размера дужи a и b (сл. 2) је 5:4.

Код праволиних су слика величине страна (дијагона, висина) дате у метрима, десиметрима, сантиметрима, милиметрима, те су: m , dm , cm и mm њихове заједничке мере, а бројне вредности страна (дијагона, висина) јесу њихови мерни бројеви. Како су стране (дијагона, висина) праволиних слика дужи, то под *размером* двеју страна (дијагона, висина; тетива и пречника код *криволиних* слика) разумемо *размеру њихових бројних вредности*.

§ 2. **Правоугли координатни систем.** Правоугли координатни систем чине две праве сталног правца, које стоје нормално једна на другој. Она права која обично заузима хоризонталан положај, зове се *апсцисна осовина* и означава се са XX' , а права што има нормалан положај према апсци-

сној осовини, зове се *ординатна осовина* и означава се са YU' . Њихов пресек O (сл. 3) зове се *координатни почетак*. Овај систем дели раван на 4 једнака дела, који се зову *квadrантима*. Као први сматра се XOU , као други UOX' , трећи $X'OY'$ и четврти $Y'OX$. Мерни број отстојања ма које тачке у равни до ординатне осовине зове се *апсциса* те тачке, а мерни број њеног отстојања до апсцисне осовине *ордината*. Тако, на сл. 3 AQ или OP је апсциса, а AP ордината тачке A . Обично се апсциса означава са x а ордината са y . Апсциса и ордината неке тачке једним се именом зову *координатама* те тачке.

Положај једне тачке у равни одређен је ако су познате њене координате. Израз (x, y) претставља тачку чија је апсциса x а ордината y . Тако, $(3, 5)$ претставља тачку чија је апсциса 3 а ордината 5. Тачка A на сл. 3 има координате $(3, 3)$. Да бисмо одредили тачку чије су координате познате, треба најпре да пренесемо од координатног почетка њену апсцису на апсцисну осовину, а затим у крајњој тачки пренете апсцисе подижемо нормалу, на коју преносимо ординату



Сл. 3

дате тачке. Крајња тачка ординатина претставља нам тражену тачку. Међутим, у свакоме квадранту постоји по једна тачка која има истоветне координате као друге три тачке у осталим квадрантима. Стога, ако знамо само апсолутне вредности координата једне тачке, нисмо у могућности да прецизно одредимо у коме се баш ква-

дранту налази дотична тачка. Да би се избегла забуна, координате тачака снабдеване су знацима „+“ и „-“. Утврђена је ова норма: Све тачке изнад апсцисне осовине имају ординате позитивне а испод ње негативне, све тачке на десној страни ординатне осовине имају апсцисе позитивне а на

левој негативне. Према овоме тачке I квадранта имају обе координате позитивне, II имају ординате позитивне а апсцисе негативне, III имају обе координате негативне, а IV имају апсцисе позитивне а ординате негативне. Тако, тачка $A(3, 3)$ налази се у I квадранту, тачка $B(-4, 4)$ у II, тачка $C(-3, -4)$ у III, а тачка $D(2, -3)$ у IV. Све тачке на апсцисној осовини имају ординате $= 0$, а све тачке на ординатној осовини имају апсцисе $= 0$. Стога, координате координатног почетка јесу $(0, 0)$; тачка $(5, 0)$ налази се на десној страни апсцисне осовине, тачка $(-3, 0)$ на њеној левој страни; тачка $(0, 6)$ на позитивној страни ординатне осовине; $(0, -4)$ на њеној доњој страни.

Отстојање неке тачке до координатног почетка зове се *радиус вектор*, или укратко *радиус*, а означава се обично са r .

Координате ма које тачке у равни и њен радиус дају правоугли троугао, у коме су координате катете а радиус хипотенуза. Ако радиус узмемо за јединицу, јасно је да ће ма која координата, као катета, имати вредност мању од јединице.

§ 3. О функцијама уопште. Ако две променљиве количине стоје у таквој вези да се мењањем вредности једне количине мења вредност и друге, онда се каже да је друга количина *функција* прве. Тако у једначини

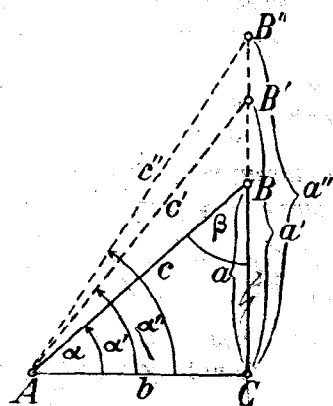
$$y - 4x = 5$$

променљива y је функција променљиве x , јер вредност за y зависи од вредности за x . За $x = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ имамо $y = 5, 9, 1, 13, -3, 17, -7, \dots$ Обим круга је функција полупречника, јер увећавањем полупречника увећава се и обим. Тако исто запремина лопте је функција полупречника те лопте. Код једнаког кретања пут s се сматра као функција брзине v за једно одређено време, јер је пут већи кад је брзина већа. Пут s се сматра и као функција времена t . Ширење тела се сматра као функција топлоте итд. Веза између функције и оне друге променљиве количине изражена је једном једначином. Она променљива количина којој ми дајемо различите вредности, зове се *независно-променљива*, а количина чија вредност зависи од вредности те *независно-променљиве*, зове се *зависно-променљива* или *функција* оне прве. Ако је дата веза између двеју променљивих количина, у теорији је свеједно коју ћемо од тих количина узети за функцију, а коју за независно-променљиву. Међутим, у пракси за функ-

цију узимамо ону променљиву до чије вредности лакше можемо доћи, дајући различите вредности независно-променљивој. Тако, боље је сматрати обим круга као функцију полупречника, него обрнуто, полупречник као функцију обима, јер је много лакше множити вредност r са 2π , да би се добила вредност обима, него вредност обима делити са 2π , да бисмо добили вредност r , а и у пракси лакше и радије се мере праве но криве линије. Да је једна количина у функција друге променљиве x , симболички се означава са $y = f(x)$, а чита се „ y је функција од x “.

Често се дешава да функција зависи не од једне већ од двеју или више независно-променљивих количина. Тако, код кретања пут s сматрамо као функцију брзине c и времена t ; запремину правоуглога паралелепипеда сматрамо као функцију његових димензија. Дакле, под функцијом разумемо такву променљиву количину чија вредност зависи од вредности једне или више променљивих количина са којима стоји у извесној вези.

✓ § 4. Гониометриске или тригонометриске функције. Размере страна правоуглог троугла ABC (сл. 4) јесу функције ма кога оштрог угла тога троугла, и обрнуто, можемо углове сматрати као функцију тих размера. Тако размеру



Сл. 4

$\frac{a}{b}$ сматрамо као функцију угла α , јер се вредност те размере мења када се угао α мења. Вредност ове размере се увећава када угао α расте, а смањује се када угао α опада. Та размера, која је размера између супротне и налегле катете угла α , постаје $\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \dots$ када удао постаје $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Она има све већу вредност растањем угла α , јер је $\frac{a}{b} < \frac{a_1}{b} < \frac{a_2}{b}$.

Размеру $\frac{b}{a}$ такође можемо сматрати као функцију угла α , јер се вредност и те размере мења када се угао α мења, и то: она се смањује када угао расте, а увећава се када угао

опада. Исто тако размере: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ мењају своју вредност када се угао α мења.

Од страна правоуглога троугла можемо да створимо *шест* размера, и то: три управне и три обрнуте. Пошто је свака од тих размера функција ма кога оштрог угла у правоуглом троуглу, то имамо свега *шест* функција које се, за разлику од осталих функција, зову *гониометриским* или *тригонометриским* функцијама. Вредност сваке од тих размера има свој нарочити назив, своје име, и то:

1. Вредност размере између супротне катете једног угла и хипотенузе зове се *синус* (sinus) тога угла, а означава се:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \text{ а } \sin \beta = \frac{b}{c} \text{ (сл. 4).}$$

2. Вредност размере између налегле катете једног угла и хипотенузе зове се *косинус* (cosinus) тога угла, а означава се:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \text{ а } \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

3. Вредност размере између супротне и налегле катете једног угла зове се *тангенс* (tangens) тога угла, а означава се:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \text{ а } \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

4. Вредност размере између налегле и супротне катете једног угла зове се *котангенс* (cotangens) тога угла, а означава се:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}, \text{ и } \operatorname{cotg} \beta = \frac{a}{b}.$$

5. Вредност размере између хипотенузе и налегле катете једног угла зове се *секанс* (secans) тога угла, а означава се:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}, \text{ а } \sec \beta = \frac{c}{a}.$$

6. Вредност размере између хипотенузе и супротне катете једног угла зове се *косеканс* (cosecans) тога угла, а означава се:

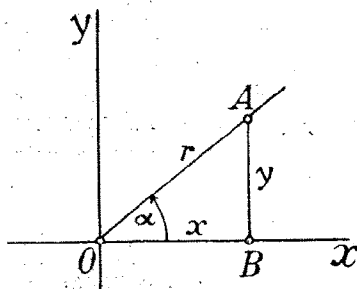
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}, \text{ а } \operatorname{cosec} \beta = \frac{c}{b}.$$

Разуме се, односи страна правоуглог троугла не мењају се ако се угао не мења, а стране се мењају. Тако, из правоуглог троугла ADC (сл. 7), који је половина равностраног

троугла ABC је $\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ова функција имаће исту вредност, ако страна равностраниг троугла постаје $a+1$, $a+2$, $a+3$ итд. Исти је случај ма са којом функцијом угла од 60° , ако се овај угао не мења, а страна a постаје поступно већа или мања.

Напомена. Како су катете по величини мање од хипотенузе, то синус и косинус не могу бити бројеви већи од јединице, *секанси* и *косеканси* могу бити само бројеви већи од јединице, а *тангенси* и *котангенси* могу бити ма какви бројеви, већи, мањи или једнаки јединици.

2. Како координате ма које тачке у равни x и y и њен радиус r склапају правоугли троугао (сл. 5), то гониометриске функције неког угла α , чије се теме поклапа са координатним почетком, један крак с позитивним правцем апсцисне осовине, а други крак с радиусом, јесу:



Сл. 5

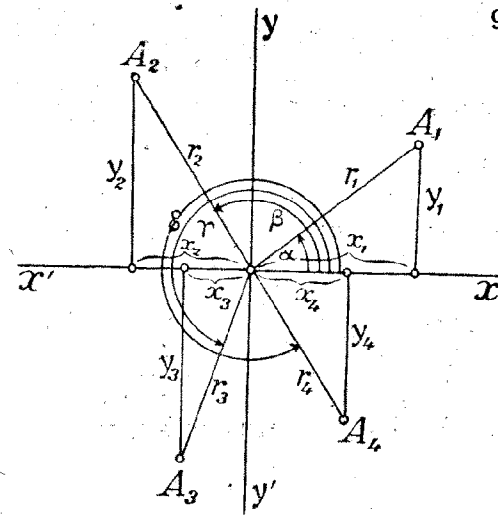
$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{r}, & \cotg \alpha &= \frac{x}{y}, \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r}, & \sec \alpha &= \frac{r}{x} \text{ и} \\ \tg \alpha &= \frac{y}{x}, & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{r}{y}.\end{aligned}$$

Према овоме, тригонометриске функције неког угла чије се теме поклапа са координатним почетком, почетни крак увек с позитивном страном апсцисне осовине, а потоњи с радиусом неке тачке у равни, можемо сматрати као вредности размера координата x и y и радиуса r неке тачке, и то:

1) *синус* као вредност размере између ординате y и радиуса r ; 2) *косинус* као вредност размере између апсцисе x и радиуса r ; 3) *тангенс* као вредност размере између ординате y и апсцисе x ; 4) *котангенс* као вредност размере између апсцисе x и ординате y ; 5) *секанс* као вредност размере између радиуса r и апсцисе x ; и 6) *косеканс* као вредност размере између радиуса r и ординате y .

3) Пошто су координате тачака у разним квадрантима

различно означене, а њихови радиуси јесу увек *позитивни*, то гониометриске функције, као вредност размера тих количина, за углове у разним квадрантима, јесу различито означене. Тако: 1) За оштри угао α (сл. 6), који припада I квадранту, јесу све функције позитивне; 2) За тупи угао β , који припада II квадранту,



Сл. 6

позитивни су само синуси и косеканси ($\sin \beta = \frac{y_2}{r_2}$, $\operatorname{cosec} \beta = \frac{r_2}{y_2}$),

а остале функције су негативне $\cos \beta = \frac{-x_2}{r_2}$, $\tg \beta = \frac{y_2}{-x_2}$,

$\cotg \beta = \frac{-x_2}{y_2}$, $\sec \beta = \frac{r_2}{-x_2}$; 3) За тупоиспупчени угао γ , који припада III квадранту, позитивни су само тангенс и котангенс

($\tg \gamma = \frac{-y_3}{-x_3} = \frac{y_3}{x_3}$, $\cotg \gamma = \frac{-x_3}{-y_3} = \frac{x_3}{y_3}$), а остале су функције

негативне ($\sin \gamma = \frac{-y_3}{r_3}$, $\cos \gamma = \frac{-x_3}{r_3}$, $\sec \gamma = \frac{r_3}{-x_3}$, $\operatorname{cosec} \gamma = \frac{r_3}{-y_3}$),

и 4) За оштроиспупчени угао δ , који припада IV квадранту, позитивне су само функције косинус и секанс ($\cos \delta = \frac{x_4}{r_4}$,

$\sec \delta = \frac{r_4}{x_4}$), а остале су функције негативне ($\sin \delta = \frac{-y_4}{r_4}$,

$\tg \delta = \frac{-y_4}{x_4}$, $\cotg \delta = \frac{x_4}{-y_4}$, $\operatorname{cosec} \delta = \frac{r_4}{-y_4}$).

Ради веће прегледности знакова гониометриских функција наводимо следеће табеле:

а) синус и косеканс

II	I
+	+
-	-
III	IV

б) косинус и секанс

II	I
-	+
-	+
III	IV

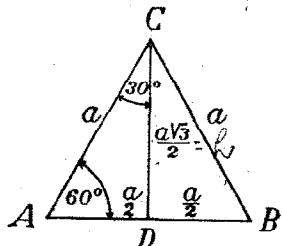
в) тангенс и котангенс

II	I
-	+
+	-
III	IV

§ 5. Израчунавање функција углова од 60° , 30° и 45°

Ради израчунавања функција углова од 60° и 30° , треба да конструишемо најпре равностранни троугао, а затим да спустимо једну од његових висина.

У добивеним правоуглим троугловима оштри су углови од 60° и 30° . Из $\triangle ADC$ (сл. 7) имамо:



Сл. 7.

$$a) \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}; \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{a} = 2.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2};$$

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}; \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2}{a} = 2.$$

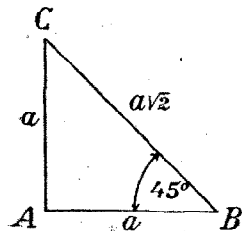
Напомена: Посматрањем вредности функција углова од 60° и 30° видимо да је $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$,

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ, \quad \sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ, \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ.$$

Исти однос постоји између функција осталих комплементних углова, што ћемо доцније видети.

с) Ради израчунавања функција угла од 45° , треба да конструишемо правоугли равнокрак троугао, код кога су оштри углови по 45° . Из $\triangle ABC$ (сл. 8) имамо:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2};$$



Сл. 8.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\sec 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}; \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

§ 6. **Задатак тригонометрије и њена подела.** Тригонометрија је онај део геометрије који решава геометриске задатке рачунским путем, уз помоћ гониометријских функција. Њен је главни задатак решавање троуглова. Решити један троугао значи помоћу довољног броја датих елемената тога троугла наћи његове остале елементе. Решавање се може извршити на два начина: конструкцијом и рачунским путем. Метод конструкције није тачан, јер при решавању помоћу лењира, шестара и угломера, које справе нису потпуно тачне, и радећи руком, служећи се писаљком или кредом, добивамо непознате елементе само приближно, а никако тачно. Напротив, радећи рачунским путем израчунавамо непознате елементе тачно.

Тригонометрија се дели на: гониометрију, равну тригонометрију и сферну тригонометрију. Гониометрија испитује случајеве растења и опадања гониометријских функција, налази везу између функција истог угла и везу између функција разних углова, стварајући тиме потребан број образаца који се примењују при решавању троуглова и осталих слика. Равна тригонометрија бави се решавањем равних слика, а сферна решавањем сферних троуглова.

§ 7. Питања и задаци за вежбу

- 1) Шта је правоугли координатни систем?
- 2) Како се зову координатне осовине и како се означавају?
- 3) Шта је координатни почетак и како се означава?
- 4) Чиме је положај тачке у равни одређен?
- 5) Шта је апсциса а шта ордината неке тачке у равни, и како се означавају?
- 6) Шта је радиус вектор неке тачке, и како се означава?
- 7) Конструирајте тачке чије су координате:
(0, 5), (4, 3), (5, -7), (-3, -5), (-6, 7), (0, -3), (0, 6) и (-5, 0).
- 8) У којим се квадрантима налазе тачке:
(5, 6), (-5, -6), (-3, 7), (3, -4), (-4, 5) и (5, -6)?
- 9) Ако један угао постаје обртањем позитивне стране апсцисне осовине у позитивном или негативном смислу, онда у коме се квадранту налазе углови:
50°, -30°, 135°, -150°, 200°, -220°, 290°, 300°, -350°, 450°, 750°, -800°, 1500°, 1800°, -2000° и 2400°?
- 10) Шта су гониометријске функције, и како се зову?
- 11) Каква је променљива количина угао код гониометријских функција?

12) Какви бројеви могу бити $\sin$ и $\cos$ једног угла?

13) " " " " $\sec$ и $\csc$ " "

14) " " " " $\tan$ и $\cot$ " "

15) Који од бројева: $-3, -2, -1, 0, 50, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, 1, 2, 3$ могу бити вредности синуса и косинуса неког угла?

16) Који од бројева: $-4, -2, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, 3, 5, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ могу бити вредности секанса и косеканса неког угла?

17) Који од бројева: $-5, -3, -1, 0, \frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{5}, 2, 4, 5$ могу бити вредности тангенса и котангенса неког угла?

18) Наћи вредност свих гониометријских функција углова добивених повлачењем радиус-вектора тачака у равни, када су те тачке: 1) $x = 3, y = 4$; 2) $x = -3, y = 4$; 3) $x = -8, y = -6$; и 4) $x = 9, y = -12$.

19) Синус неког угла је $\frac{3}{4}$. Одреди ординату тачке чији радиус $r = 16$ заклапа дотични угао.

20) Косинус неког угла је $\frac{5}{6}$. Одреди апсцису тачке чији радиус $r = 12$ заклапа дотични угао.

21) Тангенс неког угла је $\frac{3}{7}$. Одреди апсцису тачке чији радиус заклапа дотични угао, ако је њена ордината $y = 15$.

22) Тангенс неког угла је 2. Одреди радиус неке тачке, који заклапа дотични угао, ако тачка има апсцису $x = 4$.

ГОНИОМЕТРИЈА

§ 8. Графичко претстављање гониометријских функција код круга полупречника $r = 1$

Ако се центар круга O поклапа с координатним почетком правоуглог координатног система (сл. 9), онда координате ма које тачке на периферији круга и њен полупречник граде правоугли троугао. Ако посматрамо угао који гради полупречник ма које тачке кружне периферије с позитивном страном апсцисне осовине (α) и ако претпоставимо да је полупречник круга $r = 1$, онда је:

$$\sin \alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{AP}{r} = \frac{AP}{1} = AP, \cos \alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{OP}{r} = \frac{OP}{1} = OP.$$

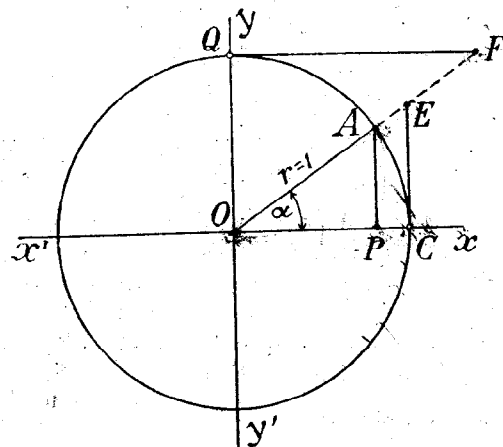
Према овоме, ако једна тачка припада кружној периферији са полупречником $r = 1$, онда је ордината те тачке $\sin \alpha$, а

апсциса $\cos \alpha$ онога угла који граде полупречник те тачке с позитивном страном апсцисне осовине. 13

Да бисмо нашли оне дужи на кругу O (сл. 9), које претстављају остале функције угла α , служимо се сличношћу правоуглих троуглова: OAP , OEC и OFQ . Ти су троуглови слични, јер имају једнаке углове. Из сличности троуглова OAP и OEC (сл. 8) имамо: 1) $\frac{AP}{OP} = \frac{EC}{OC}$ и 2) $\frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC}$, а из сличности троуглова OAP и OFQ имамо: 3) $\frac{OP}{AP} = \frac{OQ}{OQ}$ и 4) $\frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ}$. Стога је:

$$1) \tan \alpha = \frac{AP}{OP} = \frac{EC}{OC} = \frac{EC}{r} = \frac{EC}{1} = EC; \cot \alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{OQ}{OQ} = \frac{OQ}{r} = \frac{OQ}{1} = OQ; 3) \sec \alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{r} = \frac{OE}{1} = OE; \text{ и } 4) \csc \alpha = \frac{OA}{AP} = \frac{OF}{OQ} = \frac{OF}{r} = \frac{OF}{1} = OF, \text{ тј. код круга са полу-}$$

пречником $r = 1$, под тангентом једног његовог централног угла разумемо ону тангенту која је повучена из тачке C (пресечне тачке круга с позитивном страном апсцисне осовине) до пресека с оним продуженим полупречником који гради с позитивном страном апсцисне осовине дотични угао. Котангента је тангента повучена из тачке Q (пресечне тачке круга с позитивном страном ординатне осовине) до пресека



Сл. 9

с истим полупречником. Секанта је отсечак полупречника од координатног почетка до пресека са тангентом. Косеканта је отсечак полупречника од координатног почетка до пресека са котангентом. На сл. 10 конструисане су дужи које претстављају гониометријске функције оштрог угла α , тупог β , тупоиспупченог γ и оштроиспупченог δ . Те су дужи: