1.5. Definicija matrica. — 1.5.0. Definicija matrice. Neka je (k, n) uređen par rednih brojeva >0 (jedan ili oba od tih brojeva može biti ω, za koji znamo da je $1(\omega)=\{1, 2, 3, \cdots\}$.

Promatrajmo pripadne intervale $\{k\}=\{1, 2, \cdots\}$, $\{n\}$ od prvih k, odnosno n rednih pozitivnih brojeva 1, 2, $\cdots$ te njihov Descartesov produkt $\{k\}\times\{n\}=$ $=\{(i, j);\ i\in\{k\},\ j\in\{n\}\}$ položen ovako:

$\rightarrow n$

11	12	13	14	15	16	
21						
31				(i, j)		

$\downarrow k$

Ako svakom elementu (i, j) iz $\{k\}\times\{n\}$ (dakle $i\in\{k\}$ te $j\in\{n\}$ pridružimo neki predmet, skup, funkciju $\cdots a_{ij}$, tada se to preslikavanje (pridruživanje) $(i, j)\to a_{ij}$ zove *matrica* a, kojoj je *oblast ili domen jednak* $\{k\}\times\{n\}$; *govori se također da imamo posla s matricom* a *razreda ili poretka ili oblasti* $k\times n$ *odnosno* (k, n) (*ne brkaj poredak* (k, n) *s poretkom* (n, k). Piše se Dom $a=\{k\}\times\{n\}$, tj. domen ili oblast matrice (funkcije) a je $\{k\}\times\{n\}$. Radi kratkoće pisat ćemo i Dom $a=k\times n$ ili čak D $a=k\times n$. Znak a_{ij} zove se *vrijednost* (također *element, komponenta*) matrice a u tački ili polju (i, j).

Specijalno će dolaziti pitanje da li a_{ij} jest ili nije 0. Ako a_{ij} nije 0, možemo a_{ij} (ili još bolje (i, j, a_{ij}) zvati *topom* matrice a.[1])

1.5.1. U ovoj knjizi ćemo uglavnom pretpostavljati da je najmanje jedan od brojeva k, n konačan; ako su oba broja k, n beskonačna, onda ima iskazâ u ovoj knjizi koje bi trebalo mijenjati, prilagođivati i sl.

1.5.2. Oznaka matrica. Matrice se označuju (kao i druge funkcije): slovima, raznim znakovima itd. No postoji i posebna *matrična* ili *tablična oznaka*: oznaka u obliku tablice ili „matrice". *Vrijednost funkcije* (matrice) *slaže se u jednu pravokutnu tablicu, a onda se ta tablica još stavi obično u zagradu* (i to okruglu ili uglastu; zbog štampanja zgodnije se služiti *uglastim* zagradama). Tako npr. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ je tablica (matrica) poretka 2×4; označimo li je sa t, tada je Do $t=\{2\}\times\{4\}$; tu je npr. $t_{11}=1$, $t_{23}=-1$.

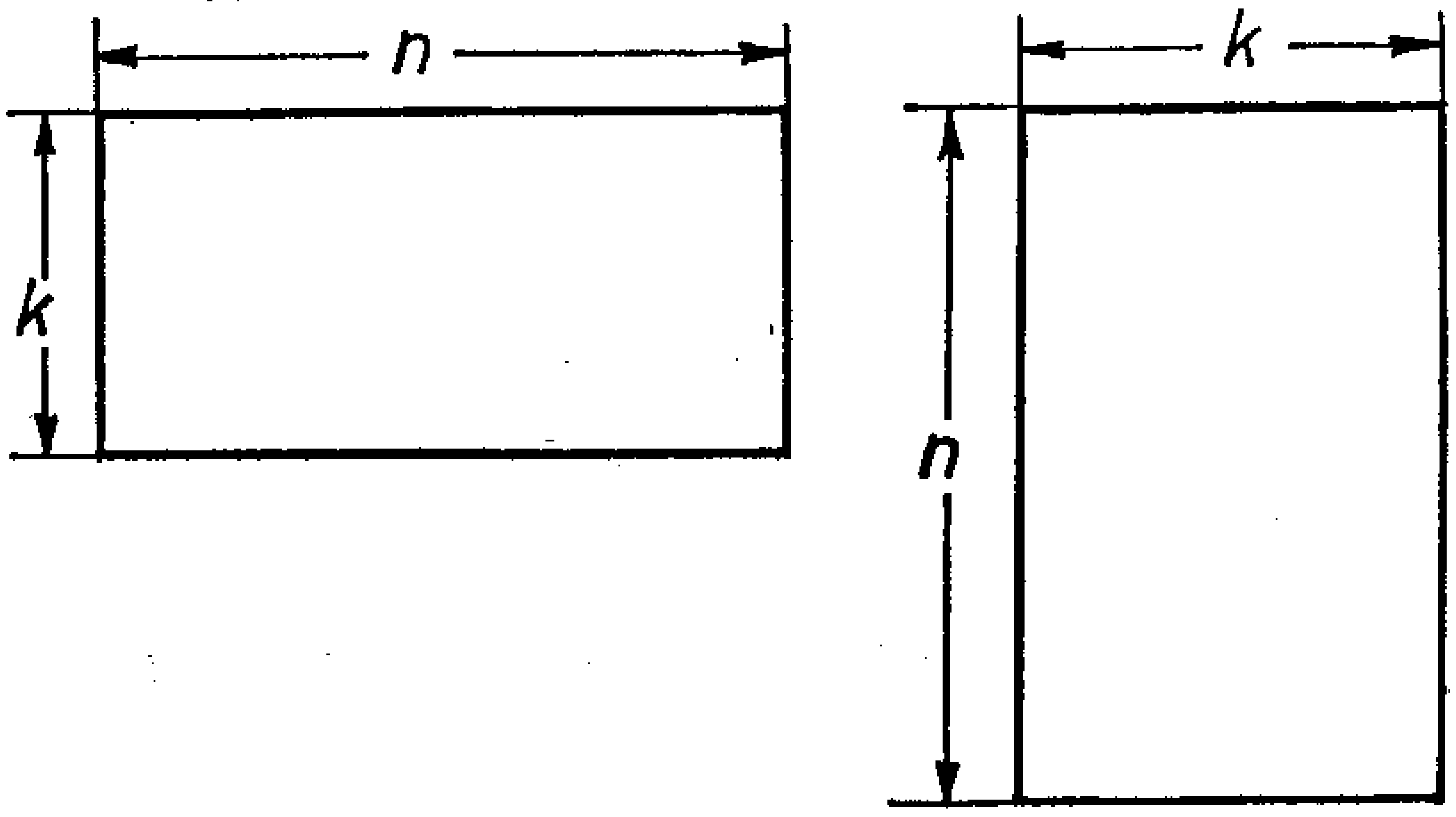
Shematski, može se matrica tipa $k\times n$ predstaviti kao pravokutnik (vidi sliku 10.1.5.2).

Ta matrica nije isto što i matrica razreda $n\times k$.

[1]) I svaki broj, vektor, $\cdots$ koji nije 0 može se zvati *topom* (isp. pogl. 8, § 2.6).

Definicija. i-ti redak (i-ti redić) matrice a jest ona podfunkcija $a_{i\cdot} = [a_{i1}\,a_{i2}\cdots a_{in}]$ matrice a za koju je $D_1 a_{i\cdot} = \{i\}$, $D_2 a_{i\cdot} = D_2 a$; *j-ti stupac matrice a* jest ona podfunkcija $a_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{bmatrix}$ kojoj je oblast $= D_1 a \times \{j\}$.

Pri tom je $D_1 a$ (odn. $D_2 a$) skup svih prvih (drugih) indeksâ, tj. $D_1 a = Pr_1 \operatorname{Dom} a$, $D_2 a = Pr_2 \operatorname{Dom} a$ (v. 3 § 5.7).



Sl. 10.1.5.2.

1.5.3. Reci, stupci i dijagonala matrice.

Dijagonala matrice a jest ona podfunkcija od a kojoj je oblast upravo dijagonala oblasti od a tj. skup $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\cdots(e, e),\cdots\}$ gdje je $e = 1, 2, \cdots, \inf\{k, n\}$.

Prema tome, dijagonala matrice a nije podmatrica osim naravno ako je matrica a tipa $(1, 1)$.

Ako je riječ o matrici a, tada ćemo njene retke označivati po redu sa $a_{1\cdot}$ ili $a_{(1)}$, $a_{2\cdot}$ ili $a_{(2)}, a_{3\cdot}$ ili $a_{(3)}, \cdots$; njene stupce ćemo označivati sa $a_{\cdot 1}$ ili $a^{(1)}$, $a_{\cdot 2}$ ili $a^{(2)}$, $a_{\cdot 3}$ ili $a^{(3)}$, itd. Prema tome $a_{1\cdot}$ znači *prvi redak* matrice a, tj. niz $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$.

Upotreba indeksa i u eksponentu ima velikih prednosti. Inače se ne treba bojati da se pobrka $a^{(2)}$ kao oznaka za drugi stupac matrice a i oznaka za *»kvadrat« matrice a* (v. pravilo M_4 u § 1.5.4); iz konteksta se uvijek vidi o čemu je riječ.

1.5.4. Organizacija matrica i veze s brojevima. Za matrice uvodimo ove uslove M_1—M_5 *o jednakosti i nejednakosti, računanju i vezama s brojevima i brojevnim izrazima:*

1) *Uslov M_1 (jednakost i nejednakost matrica). Matrica a jednaka je matrici b, simbolički*

(1) $\quad a = b,\quad$ ako je

(2) $\quad \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b,\quad$ te

(3) $\quad a_{ij} = b_{ij}$

za svako $i \in 1\,(k)$, $j \in 1\,(n)$. *Ako nije $a = b$, kaže se da je a nejednako b i piše* $a \neq b$. Npr.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, & 2, & 5-2 \\ 2\cdot 2 & 1, & 2\cos x/2 \sin x/2 \end{bmatrix}.$$

$\longrightarrow$ Primjedba. Matrična jednakost (1) znači isto što $k \cdot n$ jednakosti (3) zajedno s jednakošću (2). To treba dobro držati na umu!

2. *Uslov M_2 (zbrajanje matrica). Suma matrica a, b definira se uz uslov da su one iste oblasti, a definira se kao matrica $a+b$ za koju je*

$$(a+b)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Drugim riječima: matrice se zbrajaju tako da im se zbroje odgovarajuće vrijednosti. Ako je oblast od a različita od oblasti matrice b, tada se suma $a+b$ ne definira. Npr.

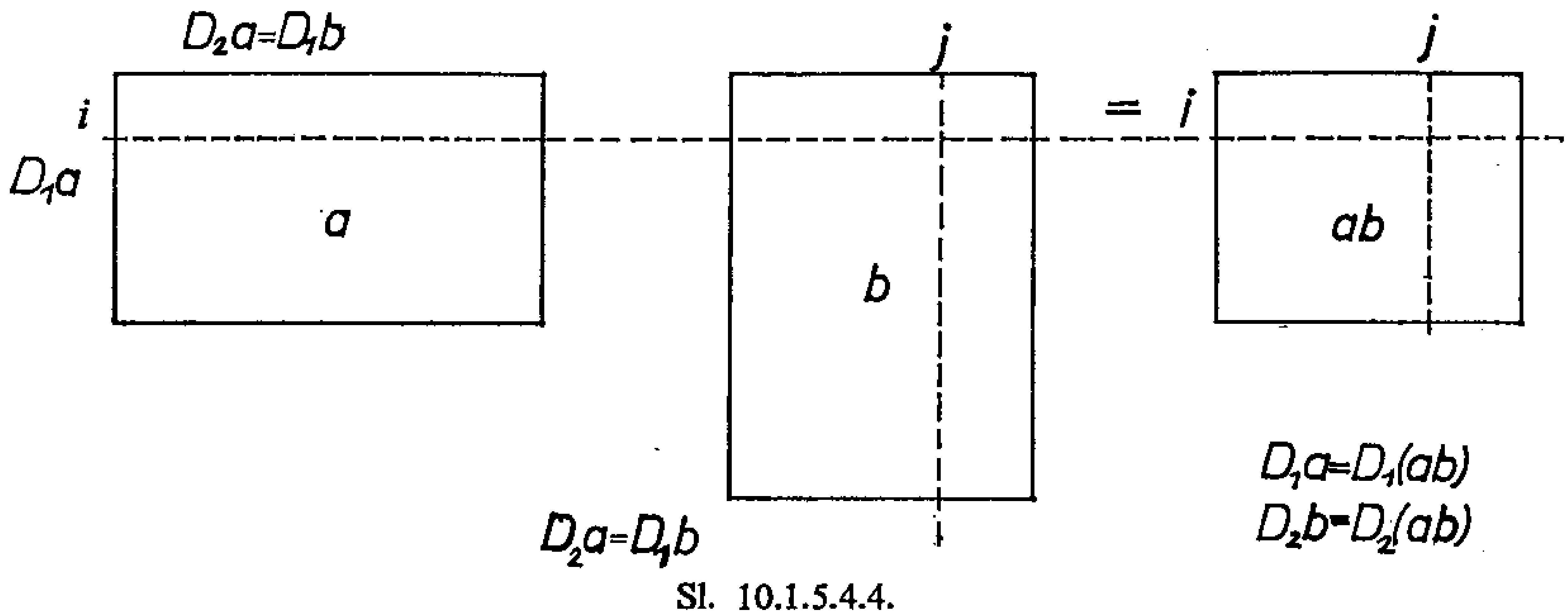
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 4+5 \\ -3+7 & -2+0 & 5+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 4 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Npr. $[1 \quad 2]+[1 \quad 2 \quad 3]$ nije definirano.

3. **Uslov M_3 (množenje matrica i brojeva).** *Produkt matrice a i broja ili brojevnog izraza q dobije se tako da se svaka vrijednost matrice pomnoži sa q; produkt se označuje sa $a\,q$. Dakle je $a\,q$ matrica tipa* Dom *a te s vrijednostima $(a\,q)_{ij}=a_{ij}\,q$. Također je $q\,a$ matrica za koju je $(q\,a)_{ij}=q\,a_{ij}$* tj. *$q\,a=a\,q$.*

Npr. $$3\cdot\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 15 & 6 \\ 12 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. **Uslov M_4 (množenje ili komponiranje matrica).**[1] *Neka je (a, b) takav uređen par matrica da a ima toliko stupaca koliko b ima redaka* (v. skicu);



Sl. 10.1.5.4.4.

tada se produkt $a\,b$ ili spoj $a\,b$ matrice a i matrice b definira kao matrica $a\,b$, kojoj se (ij)-vrijednost $(ab)_{ij}$ dobije množeći skalarno $a_{i\cdot}$ (i-ti redak od *a), $b_{\cdot j}$ (j-ti stupac b)*; dakle

$$(a\,b)_{ij}=a_{i\cdot}\circ b_{\cdot j}=[a_{i1}\,a_{i2}\cdots a_{in}]\circ\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \text{ tj.}$$

[1] To je najzanimljivija operacija s matricama; isp. poglavlje 26, § 7.6.