8) На једној речној обали узете су тачке A и B чије је отстојањ 784 m, на супротној обали постоје тачке C и D, које се виде са A и B. Наћи отстојање CD, ако су углови $BAC = 87^0\ 25'$, $BAD = 47^0\ 32'$, $ABC = 46^0\ 34'$ и $ABD = 54^0\ 35'$. Тачке A, B, C и D налазе се у истој равни.

9) Стране тупоуглог троугла BAC, са тупим углом код B, не могу се измерити непосредно. Колика је дужина стране BC, ако је нормала AD (спуштена од A на BC) 536 m, а углови BAD и CAD јесу $15^0\ 18'$ и $27^0\ 18'$.

10) Врх громобрана дужине 1 m на једној кули види се са даљине од 100 m од подножја куле под углом од $61^0\ 46'$. Наћи висину куле.

11) Наћи полупречник Земљинога упоредника географске ширине $\varphi = 48^0\ 12'\ 30''$, кад је полупречник Земље $R = 6370\ km$. Наћи отстојање двају места тога упоредника, ако часовници тих места показују временску разлику 80 минута.

12) Наћи дужину лука Земљинога меридијана који се види са висине $h = 57\ m$, када је полупречник земље $R = 6370\ km$.

13) Колика је секундна брзина једне тачке на обиму Земљинога упоредника географске ширине $\varphi = 48^0\ 12'\ 35''$, кад је Земљин полупречник $R = 6370\ km$.

14) Под којим се углом види пречник Зорњаче кад је она удаљена од Земље 40 милиона km, а прави јој је пречник 12000 km?

15) Под којим углом φ видимо торањ од 65 m висине у раздаљини од 85 m, ако је наше око 1,6 m над површином Земље?

16) Колики је громобран на торњу од 65 m висине, кад се он види под углом од $2^0\ 50'\ 50''$ са једне тачке која је у хоризонталном правцу удаљена од подножја торња 70 m?

17) Колика је висина брда чији се врх види под угловима од $63^0\ 26'$ и $71^0\ 34'$ са крајњих тачака једне хоризонталне основице од 100 m дужине, а која пролази кроз подножје брда?

18) Наћи отстојање једног села до једне вароши чија се звонара (врх звонаре) види са села из двеју тачака удаљених између себе 80 m под угловима од $23^0\ 42'\ 28''$ и $25^0\ 17'\ 2''$.

19) Копенхаген и Москва имају готово једнаку северну географску ширину $55^0\ 43'$. Географска дужина од ферског меридијана Копенхагена је $30^0\ 14'$ а Москве $55^0\ 14'$. Наћи отстојање између Москве и Копенхагена, кад је Земљин полупречник $R = 6370\ km$.

20) Колика је разлика часовника двају места удаљених једно од другог за $l = 619\ km$, кад је за оба места географска ширина $S = 14^0\ 15'$, а полупречник Земљин $R = 6378\ km$? (Београд, I ж. 1914)

21) На колику висину треба да се уздигне аероплан, да би се могла видети толика површина колика је површина наше државе (250000 km^2), кад је полупречник Земље $R = 6370\ km$? (В. Кикинда, 1932)

22) Да се израчуна ширина реке AB, кад је у продужењу праве AB, под углом $\alpha = 48^0\ 12'\ 34''$ према њој, дата права $CD = 56\ m$ која са визираним линијама из D и A заклапа углове $CDB = 15^0\ 31'\ 49''$ и $CDA = 53^0\ 7'\ 18''$. (Ниш, 1907)

23) Са врха светионика, који је висок 40 m над морем, види се два брода, и то под депресионим угловима $\alpha = 10^0\ 35'\ 40''$ и $\beta = 12^0\ 26'\ 45''$, а догледни угао оба брода износи $\gamma = 96^0\ 22'\ 14''$. Колико су далеко у том часу оба брода међу собом? (Панчево, 1932)

24) Највећа планина на Земљи је Хималаја, чији врх лежи 8837 m изнад морске површине. Колика је депресија хоризонта, видна даљина и висина калоте која се види са тог врха, ако је полупречник Земље $R = 6371050\ m$? (Приштина, 1931)

25) Два су стуба удаљена један од другог 100 m. Из средине спојнице њихових подножја види се врх једног стуба под елевационим углом $\alpha = 49^0$, а врх другог под елевационим углом $\beta = 71^0$. Колико је жице потребно да се разапне између оба врха? (Сарајево, II м. 1929)

26) Врхови двају брегова леже у једној истој вертикалној равни са посматрачем и изгледају му издигнути над хоризонтом под угловима $9^0\ 30'$ и $18^0\ 30'$. Ако се посматрач приближи 6365 m, остајући у истој вертикалној равни и на једној хоризонтали, он тада види оба врха у истом правцу под углом од 37^0 над хоризонтом. Израчунати у метрима висине оба брега. (Ужице, 1912)

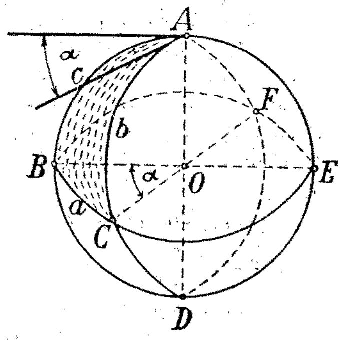
27) Са балона види се део Земљине површине под углом $2\alpha = 114^0\ 37'\ 44''$, полупречник Земљин је 6378 km; на којој је висини балон и колика је посматрана површина? (Београд, I ж. 1923)

28) Један метеор види се истовремено из два места A и B истог меридијана, и то из A под углом $82^0\ 24'\ 10''$ а из B под углом од $36^0\ 18''$ према зениту. Колико је тада отстојање метеора од површине Земље, када су места A и B удаљена за $30^0\ 40'$, а полупречник Земље је 8595 миља? (Београд, I м. 1922)

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА

§ 31. Сферни троуглови, њихове врсте и особине

У Стереометрији смо видели да под сферним троуглом разумемо део лоптине површине ограничен трима луцима трију главних лоптиних кругова (ABC, сл. 62). Лукови: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, јесу *стране* сферног троугла. Ове стране једновремено су стране другог сферног троугла који са првим даје лоптину површину. Ако није нарочито наглашено, узимамо у посматрање онај сферни троугао који је по површини мањи од полулопте. Кругови: $ABDE$, $ACDF$ и $BCEF$ који дају сферни троугао ABC, деле лоптину површину још на седам сферних троуглова, по четири на свакој полулопти. Ови троуглови могу бити: *упоредни*, *унакрсни* и *супротни*, према томе да ли имају само заједничку страну, или само једно



Сл. 62

заједничко теме, или су темена једнога троугла супротне тачке темена другога троугла. Тако троуглови: ABC и BCD, ABC и ACE, ... јесу упоредни; троуглови: ABC и CDE, ABC и AEF, ... јесу унакрсни; троуглови: ABC и DEF, BCD и AEF, ... јесу супротни. Свака два упоредна сферна троугла дају сферни двоугао ($ABC + BCD = ABDC$), а супротни сферни троугли јесу једнаке површине.

Према странама и сферне троугле, као и равне, делимо на: *равностране, равнокраке* и *разностране*, а према угловима на *правоугле* и *косоугле*. Код равностраног троугла све су стране једнаке ($a = b = c$), код равнокраког су једнаке само две, а код разностраног све три стране су различите величине. Правоугли сферни троугао може имати *сва три угла* права ($A = B = C = 90^0$), или *само два*, или *само један* прав угао. Код правоуглог сферног троугла са три права угла стране су *квадранти* ($a = b = c = 90^0$), а код правоуглог сферног троугла са два права угла само су две стране квадранти (на сл. 62 b и c), а трећа страна има онолико степена колико и њен супротни угао (на сл. 62 страна a и угао A имају исти број степена α). Ова два правоугла сферна троугла не узимамо у поступак при решавању правоуглог сферног троугла, пошто су њихови елементи познати, већ само правоугли сферни троугао са једним правим углом. Код овог троугла, стране правог угла јесу *катете*, а наспрамна страна *хипотенуза*.

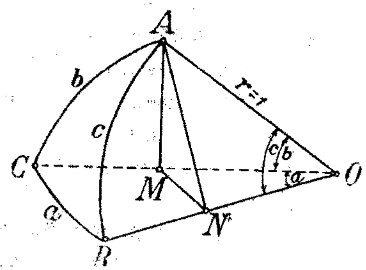
Ако темена сферног троугла ABC (сл. 62) спојимо са центром лопте O, онда добијамо сферни клин $OABC$, који је у ствари један тростран рогаљ, чије је теме у центру лопте, ивице су му полупречници лопте, ивични углови су стране, а углови рогља су углови сферног троугла. Стога између страна и углова сферног троугла постоје исти односи као код тространог рогља. Према овоме, све теореме у стереометрији, које се односе на особине, подударност и симетричност тространих рогљева, важе и за сферне троуглове.

У Стереометрији смо видели да је површина сферног троугла $P = \frac{r^2 \pi e}{180^0}$, где је r полупречник лопте, а e, звани сферни *ексцес* или сферни *сувишак*, једнак је разлици између збира углова сферног троугла и 180^0 ($e = A + B + C - 180^0$). Запремина рогља који одговара сферном троуглу је

$$v = \frac{r^3 \pi e}{540^0} = \frac{r^2 \pi e}{180^0} \cdot \frac{r}{3} = P \cdot \frac{r}{3}.$$

I. Решавање правоуглог сферног троугла

§ 32. **Неперово правило.** Ово правило употребљавамо при решавању правоуглог сферног троугла, а изводи се на следећи начин. Нека је ABC (сл. 63) сферни правоугли троугао, са правим углом код C, а припада лопти чији је полупречник r узет за јединицу. Тада су a и b катете а c хипотенуза тога правоуглог сферног троугла. Претпоставимо још да је овај троугао такав да су му стране и углови, осим C, мањи од 90^0. Ако његова темена спојимо са центром лопте O, добијамо тространи рогаљ $OABC$.



Сл. 63

Спуштањем нормала AM и AN на ивице OC и OB и спајањем тачака M и N, добијамо правоугле равне троугле: AMN, OAM, OAN и OMN. У првом је $\measuredangle M = \measuredangle C = 90^0$ а $\measuredangle N = \measuredangle B$. Тада је: $ON = r \cos c = \cos c$; $AN = r \sin c = \sin c$; $OM = r \cos b = \cos b$ и $AM = r \sin b = \sin b$. Стога је:

1) Из $\triangle\, OMN$: $ON = OM \cos a$, или $\boldsymbol{\cos c = \cos b \cdot \cos a}$;

2) Из $\triangle\, AMN$: $\sin N = \sin B = \frac{AM}{AN} = \frac{\sin b}{\sin c}$, или

$\boldsymbol{\sin b = \sin B \cdot \sin c}$, и слично овоме: $\boldsymbol{\sin a = \sin A \cdot \sin c}$;

3) $\cos N = \cos B = \frac{MN}{AM} = \frac{ON \cdot tg\, a}{ON\, tg\, c} = \frac{tg\, a}{tg\, c}$, или

$\boldsymbol{tg\, a = \cos B \cdot tg\, c}$, и слично овоме: $\boldsymbol{tg\, b = \cos A \cdot tg\, c}$;

4) $tg\, N = tg\, B = \frac{AM}{MN} = \frac{OM \cdot tg\, b}{OM \sin a} = \frac{tg\, b}{\sin a}$, или

$\boldsymbol{tg\, b = tg\, B \cdot \sin a}$, и слично овоме: $\boldsymbol{tg\, a = tg\, A \cdot \sin b}$;

5) Множењем једначине $tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b}$ и $tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin a}$

добијамо: $tg\, A\, tg\, B = \frac{tg\, a\, tg\, b}{\sin a \sin b} = \frac{1}{\cos a \cos b}$, или, заменом

$\cos a \cos b$ са $\cos c$ (1): $tg\, A \cdot tg\, B = \frac{1}{\cos c}$,

или $\boldsymbol{\cos c = cotg\, A\; cotg\, B}$;

6) Из $\cos B = \frac{tg\, a}{tg\, c} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{\sin c}{\cos c}} = \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos a}$,

заменом $\frac{\sin a}{\sin c}$ са $\sin A$ и (2) $\frac{\cos c}{\cos a}$ са $\cos b$ (1), имамо: $\boldsymbol{\cos B = \sin A \cdot \cos b}$.

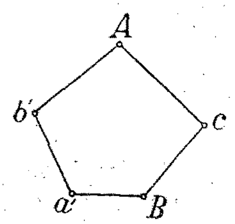
Ако у горњим обрасцима узмемо у поступак не катете a и b, већ њихове комплементе a' и b', добијамо *Неперове обрасце:*

1) $\boldsymbol{\cos c = \sin b' \cdot \sin a'}$; 2) $\boldsymbol{\cos b' = \sin B \cdot \sin c}$;

3) $\operatorname{cotg} a' = \cos B \cdot \operatorname{tg} c$, или $\boldsymbol{\cos B = \operatorname{cotg} a' \cdot \operatorname{cotg} c}$;

4) $\operatorname{cotg} a' = \operatorname{tg} A \cdot \cos b'$, или $\boldsymbol{\cos b' = \operatorname{cotg} a' \operatorname{cotg} A}$;

5) $\boldsymbol{\cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B}$; и 6) $\boldsymbol{\cos B = \sin A \cdot \sin b'}$.



Сл. 64

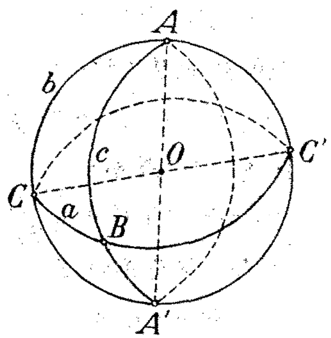
Ове обрасце можемо лако упамтити, ако елементе сферног троугла ABC (сл. 63), осим угла C, поредимо по теменима једног петоугаоника, замењујући катете a и b са њиховим комплементима a' и b'. Тако Неперово правило гласи: **косинус ма ког елемента једнак је производу синуса одвојених елемената, или производу котангенса налеглих елемената.**

Напомена: Лако је увидети да Неперово правило вреди и кад су елементи сферног троугла ABC, осим C, већи од 90^0. Тако, ако су елементи b и c већи од 90^0 (сл. 65), онда је из упоредног сферног троугла $A'BC$:

1) $\cos(180^0 - c) = \cos(180^0 - b) \cos a$, или
$$\boldsymbol{\cos c = \cos b \cdot \cos a}.$$

2) $\sin a = \sin A \cdot \sin(180^0 - c)$, или $\boldsymbol{\sin a = \sin A \cdot \sin c}$;

3) $\operatorname{tg}(180^0 - b) = \cos A \cdot \operatorname{tg}(180^0 - c)$, или $\boldsymbol{\operatorname{tg} b = \cos A \cdot \operatorname{tg} c}$ итд.



Сл. 65

Ово правило важи и кад $r \neq 1$.

§ 33. Случајеви решавања правоуглог троугла

Први случај. — *Дата је хипотенуза* c *и једна катета, нпр.* $\boldsymbol{a}$; *наћи остале елементе:* b, A и B. Из $\cos c = \sin b' \sin a'$, $\cos a' = \sin c \sin A$ и $\cos B = \operatorname{cotg} a' \operatorname{cotg} c$ (сл. 64), или $\cos c = \cos b \cos a$, $\sin a = \sin c \sin A$ и $\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg} c$ имамо:

(1) $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$; 2) $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$; и 3) $\cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$.

Како за A из (2) добијамо две вредности, оштар и туп

угао, на први поглед изгледао би задатак неодређен. Међутим ова сумња отпада, јер се за A узима вредност $\gtrless 90^0$, према томе да ли је $a \gtrless 90^0$.

Бројни пример: $c = 63^0\,29'\,35''$, $a = 33^0\,39'\,15''$.

1) $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} = \frac{\cos 63^0\,29'\,35''}{\cos 33^0\,39'\,15''}$; $\log \cos b = \log \cos 63^0\,29'\,35'' - \log \cos 33^0\,39'\,15'' = \overline{1},64963 - \overline{1},92033 = \overline{1},72930$;
$b = arc$-у чији је $\log \cos \overline{1},72930 = 57^0\,34'\,36''$.

2) $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin 33^0\,39'\,15''}{\sin 63^0\,29'\,15''}$; $\log \sin A = \log \sin 33^0\,39'\,15'' - \log \sin 63^0\,29'\,35'' = \overline{1},74365 - \overline{1},95177 = \overline{1},79188$;
$A = arc$-у чији је $\log \sin \overline{1},79188 = 38^0\,15'\,45''$.

3) $\cos B = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg}\,33^0\,39'\,15''}{\operatorname{tg}\,63^0\,29'\,35''}$; $\log \cos B = \log \operatorname{tg} 33^0\,39'\,15'' - \log \operatorname{tg} 63^0\,29'\,35'' = \overline{1},82332 - 0,30213 = \overline{1},52119$;
$B = arc$-у чији је $\log \cos \overline{1},52119 - 70^0\,36'\,27''$.

Други случај. — *Дата је хипотенуза* c *и један налегли угао, нпр. угао* A; *наћи остале елементе:* $\boldsymbol{a}$, b *и* B.

Из $\cos a' = \sin A \cdot \sin c$, $\cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B$ и $\cos A = \operatorname{cotg} b' \cdot \operatorname{cotg} c$ (сл. 64), или $\sin a = \sin A \cdot \sin c$, $\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B$ и $\cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{cotg} c$ имамо:

1) $\sin a = \sin A \sin c$; 2) $\operatorname{cotg} B = \cos c \cdot \operatorname{tg} A$; и 3) $\operatorname{tg} b = \cos A \cdot \operatorname{tg} c$.

Бројни пример: $c = 63^0\,29'\,35''$, $A = 38^0\,15'\,45''$.

1) $\sin a = \sin A \cdot \sin c = \sin 38^0\,15'\,45'' \cdot \sin 63^0\,29'\,35''$; $\log \sin a = \overline{1},74365$;
$a = arc$-у чији је $\log \sin \overline{1},74365 = 33^0\,39'\,15''$.

2) $\operatorname{cotg} B = \cos 63^0\,29'\,35'' \cdot \operatorname{tg} 38^0\,15'\,45''$; $\log \operatorname{cotg} B = \overline{1},54653$;
$B = arc$-у чији је $\log \operatorname{cotg} \overline{1},54653 = 70^0\,36'\,27''$.

3) $\operatorname{tg} b = \cos 38^0\,15'\,45'' : \operatorname{tg} 63^0\,29'\,35''$; $\log \operatorname{tg} b = 0,19710$;
$b = arc$-у чији је $\log \operatorname{tg} 0,19710 = 57^0\,34'\,36''$.

Трећи случај. — *Дате су катете* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$; *наћи остале елементе:* $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$.

Из $\cos c = \sin a' \sin b'$, $\cos b' = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} a'$ и $\cos a' = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} b'$ (сл. 64), или $\cos c = \cos a \cos b$, $\sin b = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{tg} a$ и $\sin a = \operatorname{cotg} B \operatorname{tg} b$ имамо:

1) $\cos c = \cos a \cos b$; 2) $\operatorname{cotg} A = \sin b \cdot \operatorname{cotg} a$; и 3) $\operatorname{cotg} B = \sin a \operatorname{cotg} b$.

Бројни пример: $a = 127^0\,56'\,33''$, $b = 63^0\,15'\,48''$.

1) $\cos c = \cos a \cos b = \cos 127^0\,56'\,33'' \cdot \cos 62^0\,15'\,48'' = -\cos 52^0\,3'\,27'' \cdot \cos 63^0\,15'\,48''$, што значи да је c туп угао, пошто је вредност његовог косинуса негативна. Ако је c' његов суплементни, онда је:
$$\cos c = \cos(180^0 - c') = -\cos c' = -\cos 52^0\,3'\,27'' \cdot \cos 63^0\,15'\,48'',$$
или $\cos c' = \cos 52^0\,3'\,27'' \cdot \cos 63^0\,15'\,48''$.