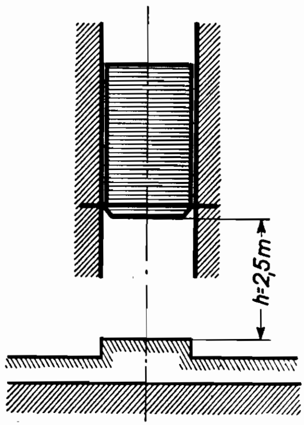
Prema izloženome možemo reći da je **slobodan pad jednoliko ubrzano gibanje bez početne brzine.** Iz toga izlazi da za slobodan pad vrijede isti već poznati izrazi za jednoliko ubrzano gibanje, samo mjesto akceleracije a moramo staviti akceleraciju g sile teže, pa je brzina:

$$\boxed{\begin{array}{c} v = g \cdot t \text{ ili } v = \sqrt{2gs} \\ s = \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{array}}$$

a put:



Sl. 81.

ZADACI

1. Kojom brzinom udari bat na nakovanj ako pada s visine od 2,5 m (sl. 81)?

2. U duboku jamu netko pusti kamen i nakon 4 sekunde čuje kako je kamen udario. Koliko je duboka jama ako je brzina zvuka 333 ms^{-1}?

Rješenje: Ako je x dubina jame, onda je

$$4 = \frac{x}{333} + \sqrt{\frac{2x}{10}}$$

3. Malj za razbijanje lijevanog željeza težak je 5 kN, a treba ga podići **na** visinu h kako bi slobodnim padom udario brzinom od 20 ms^{-1} o željezni komad koji se mora razbiti. Izračunaj: a) potrebnu visinu dizanja malja; b) vrijeme padanja malja!

4. Koliko udara u minuti može učiniti čekić za zabijanje drvenih stupova (pilota) koji pada s visine od 3 m ako je vrijeme dizanja čekića dva puta veće od vremena padanja? Kolikom brzinom udari čekić o stup?

5. S koje je visine tijelo palo na zemlju ako je udarilo brzinom od 23,5 ms^{-1}?

26. JEDNOLIKO USPORENO GIBANJE

Mjesto da se tijelu koje se giba povećava brzina, ona se može u svakoj jedinici vremena smanjivati uvijek za istu vrijednost, pa se takvo gibanje zove jednoliko usporeno. Pri tom se mora pretpostaviti da je tijelo već imalo početnu brzinu v_0 jer se u protivnom slučaju ne bi imalo što smanjivati. Ovo **smanjenje brzine u jedinici vremena zove se usporenje ili retardacija (—a).** Zato za jednoliko usporeno gibanje imamo iste izraze kao i za jednoliko ubrzano s početnom brzinom, samo mjesto a moramo staviti $-a$. Izrazi za brzinu i put glase:

$$\boxed{v = v_0 - a \cdot t; \qquad s = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2}$$

ZADACI

1. Brzi vlak koji se giba brzinom od 80 kmh^{-1} zaustavi se kočnicama na putu od 200 m. Koliko je trajalo kočenje i kolika je retardacija?

Rješenje:

$$v_0 = 80\,\text{kmh}^{-1} = \frac{80 \cdot 1000}{3600} = 22{,}2\,\text{ms}^{-1} \qquad v = 0; \qquad v_0 - a \cdot t = 0$$

$$a = \frac{v_0}{t}; \; s = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad s = v_0 \cdot t - \frac{v_0}{2t} \cdot t^2 \qquad s = \frac{v_0 \cdot t}{2};$$

$$t = \frac{2 \cdot s}{v_0} = \frac{2 \cdot 200}{22{,}2} \qquad t = 18\,\text{s}; \qquad a = \frac{22{,}2}{18} = 1{,}2\,\text{ms}^{-2}$$

2. Kolika je retardacija tramvaja ako mu je brzina 30 kmh^{-1}, a zaustavio se na putu od 25 m?

3. Dizalica se giba brzinom od 80 m min^{-1}. Nakon isključenja motora dizalica se još gibala 4 m jednoliko usporeno, dok nije stala. Koliko je vremena trajalo ovo gibanje i koliko je usporenje?

27. NEJEDNOLIKO GIBANJE

Gibanje kod kojega tijelo u jednakim vremenskim razmacima prevaljuje nejednake putove zove se nejednoliko gibanje. Pri takvom gibanju brzina je skoro u svakom trenutku drugačija, pa stoga možemo govoriti o trenutnoj brzini. To je ona brzina koju tijelo ima kod nejednolikog gibanja u danom trenutku ili u određenoj tački puta. Ako je tijelo u t sekundi prevalio put s bez obzira na trenutnu brzinu, možemo izračunati srednju brzinu po izrazu:

$$\boxed{v_s = \frac{s}{t}\,\text{ms}^{-1}}$$

U stvari, tijelo ni u jednom trenutku nije moralo imati tu brzinu. Ono je moglo na nekom dijelu puta imati trenutnu brzinu veću ili manju od srednje ili prosječne brzine. Stoga možemo reći: **Srednja ili prosječna brzina nejednolikog gibanja je ona brzina koju bi tijelo imalo da se gibalo jednoliko i da je u istom vremenu prevalilo isti put kao kod nejednolikog gibanja.**

28. VERTIKALNI HITAC U ZRAKOPRAZNOM PROSTORU

28. 1. Vertikalni hitac prema dolje. Bacimo li neko tijelo s početnom brzinom v_0 vertikalno prema dolje, ono će se gibati jednoliko ubrzano zbog djelovanja sile teže, pa je prema tome brzina:

$$v = v_0 + g \cdot t$$

a put:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

28. 2. Vertikalni hitac uvis. Izbacimo li neko tijelo vertikalno uvis početnom brzinom v_0, njegova će se brzina smanjivati u svakoj sekundi za $g = 9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}$ zbog djelovanja sile teže, pa će se tijelo gibati jednoliko usporeno. Prema tome, brzina se računa po izrazu:

$$\boxed{v = v_0 - g \cdot t}$$

a put:

$$\boxed{s = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2}$$

U najvišoj tački do koje se tijelo popne konačna brzina je $v = 0$. Stoga vrijeme penjanja t možemo izračunati tako da u izraz za brzinu stavimo za konačnu brzinu $v = 0$, tj.

$$0 = v_0 - g \cdot t$$

pa je:

$$\boxed{t = \frac{v_0}{g}}$$

Visinu vertikalnog hica uvis $s = h$ dobit ćemo tako da u izraz za put uvrstimo vrijeme penjanja, tj.

$$h = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2}$$

$$h = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2g}$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}\,\mathrm{m}}$$

Kad tijelo stigne u najvišu tačku, brzina mu je jednaka nuli, i zatim počinje slobodno padati. Put koji tijelo prevali slobodnim padom dobiva se iz $v = \sqrt{2gh}$, pa je

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Budući da je visina vertikalnog hica uvis jednaka putu slobodnog pada, tj.

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

izlazi da je

$$v_0 = -v,$$

tj. tijelo padne na zemlju brzinom kojom je izbačeno vertikalno uvis, ali protivnog smjera.

ZADACI

1. Tijelo je bačeno vertikalno uvis brzinom od 30 ms^{-1}. Koliko je vrijeme penjanja, visina penjanja, i nakon kojeg će se vremena tijelo vratiti na zemlju?

Rješenje (uzeto je za $g = 10\ ms^{-2}$);

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{30\,ms^{-1}}{10\,ms^{-2}} = 3\,s; \qquad h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{900\,m^2s^{-2}}{20\,ms^{-2}} = 45\,m$$

Tijelo će se vratiti na zemlju nakon 6 s, jer vrijeme penjanja traje 3 s, a isto toliko i vrijeme padanja.

2. Koju će visinu dostići puščani metak koji je ispaljen vertikalno uvis brzinom od 350 ms^{-1}, i nakon kojeg će se vremena vratiti na zemlju?

3. Granata je ispaljena iz topovske cijevi vertikalno uvis brzinom od 700 ms^{-1}. Kolika je njena brzina nakon 10 s, i na kojoj se visini nalazi?

4. Dokaži da je vrijeme penjanja kod vertikalnog hica uvis jednako vremenu za koje će tijelo slobodno padati!

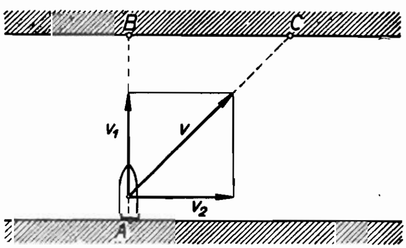
29. SASTAVLJENA GIBANJA

29. 1. Paralelogram brzina. Uputi li se neki čovjek s čamcem preko rijeke vozeći u smjeru od tačke A prema tački B (sl. 82) brzinom v_1, on neće doći u tačku B jer ga zanosi struja rijeke koja ima brzinu v_2. Rezultirajuću brzinu v, dobit ćemo po paralelogramu brzina kojem su komponente v_1 i v_2, pa će se čamac kretati koso niz rijeku i doći u tačku C.

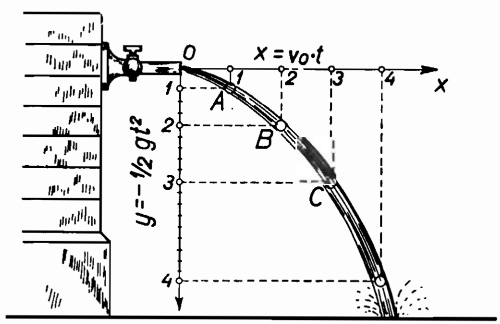
Na temelju izloženoga možemo stvoriti ovaj zaključak. Ima li neko tijelo da izvrši istovremeno dva raznosmjerna jednolika gibanja, svako s različitom brzinom, rezultanta tih komponentnih brzina jednaka je po veličini i po smjeru dijagonali paralelograma kome su te dvije brzine komponente.

Ovdje smo dobili od dva pravocrtna gibanja također pravocrtno gibanje. Međutim, rezultantno gibanje može biti i krivocrtno, kako ćemo to vidjeti kod horizontalnog i kosog hica.

29. 2. Horizontalni hitac. Otvorimo naglo vodovodni pipac i pustimo da iz njega struji snažan mlaz vode (sl. 83). Svaka čestica toga mlaza opisat će luk parabole koja je rezultanta jednolikog gibanja u pravcu i slobodnog pada. U vodoravnom pravcu gibao bi se mlaz jednoliko da nema otpora zraka, dok zbog sile teže pada vertikalno prema Zemlji, tj. giba se jedno-



Sl. 82.



Sl. 83.

liko ubrzano. Zanemarimo li otpor zraka, mlaz vode će u horizontalnom pravcu prevaliti u svakoj sekundi jednak put, tj. toliko kolika mu je brzina v_0. U vertikalnom pravcu mlaz će u prvoj sekundi pasti 4,9 m, u drugoj 14,7 m, u trećoj 24,5 m itd. Sastavimo li paralelogram gibanja nakon svake sekunde, dobit ćemo tačke A, B, C ... Spojnica ovih tačaka s početkom O mlaza dat će dio parabole. Da izvedemo jednadžbu toga gibanja, nacrtat ćemo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u tački O tako da os x pada u smjer jednolikog gibanja, a os y u smjer slobodnog pada. Prema tome je

$$\boxed{\begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \\ y &= -\frac{g}{2} \cdot t^2 \end{aligned}}$$

Iz prve jednadžbe je $t = \frac{x}{v_0}$.

Uvrstimo li to u drugu jednadžbu, dobit ćemo jednadžbu parabole po kojoj se tijelo giba kod horizontalnog hica, tj.

$$\boxed{y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2}$$

Iz te jednadžbe vidimo: Što je početna brzina v_0 veća, bit će y manji, a time i parabola položitija. Što je brzina v_0 manja, bit će y veći, a parabola strmija.

Poslije vremena t tačka će udariti u zemlju, te je visina padanja

$$\boxed{H = \frac{g}{2} \cdot t^2}$$

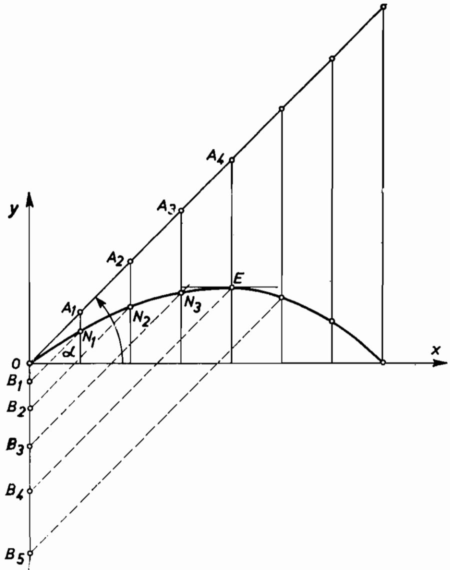
Za to vrijeme tačka će preći horizontalni put-domet

$$\boxed{D = v_0 \cdot t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

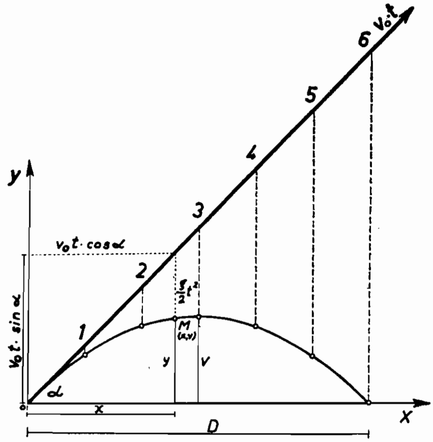
29. 3. Kosi hitac. Kod kosog hica gibanje je sastavljeno. Takvo gibanje izvodi svako tijelo bačeno početnom brzinom v_0 pod nekim kutom α prema horizontali, koji se zove elevacioni kut.

Kada na projektil, koji smatramo materijalnom tačkom, a koji se izbaci iz nekog oruđa, ne bi djelovala sila teža i otpor zraka, on bi se gibao pravocrtno i jednoliko. Nakon jednakih vremenskih razmaka projektil bi bio u tačkama A_1, A_2, A_3 ... (sl. 84). Zakon gibanja je predočen jednadžbom

$$s = v_0 \cdot t$$



Sl. 84.



Sl. 85.

Da nema gibanja po kosom pravcu, tijelo bi slobodno padalo po zakonu

$$y = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

te bi se tijelo u jednakim vremenskim razmacima nalazilo u položajima B_1, B_2, B_3 ... Međutim oba se gibanja zbivaju istovremeno, pa će se projektil nalaziti u položajima N_1, N_2, N_3. Spojimo li sve ove tačke, dobit ćemo krivulju puta tijela u vertikalnoj ravnini, koja je parabola. Izvedimo jednadžbu za kosi hitac u koordinatnom sustavu $O\ x\ y$. Položaj bilo koje tačke M određen je koordinatama x, y (sl. 85). Vidimo iz slike da je

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha \qquad y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Izračunamo li t iz prve jednadžbe i uvrstimo u drugu, dobit ćemo jednadžbu kosog hica, tj. parabole

$$\boxed{y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}}$$

Iz te jednadžbe lako izračunamo domet D, a to je ona tačka gdje parabola siječe os x. Za tu tačku je $y = 0$, a $x = D$

$$0 = x \cdot tg\,\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

pa je

$$x = D = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha}$$

Domet će biti najveći kada bude $\alpha = 45^0$, pa je

$$\boxed{D_{maks} = \frac{v_0^2}{g}}$$

Isti cilj u horizontu možemo pogoditi s dva različita elevaciona kuta α_1 i α_2, koji su komplementni, tj. $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$ jer je $\sin 2\,\alpha_1 = \sin 2\,\alpha_2$, gdje je $\alpha_2 = 90 - \alpha_1$, pa je $\sin 2\,(90 - \alpha_1) = \sin\,(180 - 2\,\alpha_1) = \sin 2\,\alpha_1$. Kutovi α_1 i α_2 moraju ispunjavati još jedan uvjet i to da je jedan veći od 45^0, a drugi manji od 45^0: $\alpha_1 = 45^0 + \gamma$, $\alpha_2 = 45^0 - \gamma$. Tada je naime

$$\sin 2\,(45^0 + \gamma) = \cos 2\,\gamma = \sin 2\,(45^0 - \gamma) = \cos 2\,\gamma.$$

Projektil će postići svoju najveću visinu kada je

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin\alpha \cos\alpha$$

Uvrstimo li tu vrijednost u jednadžbu parabole, dobit ćemo

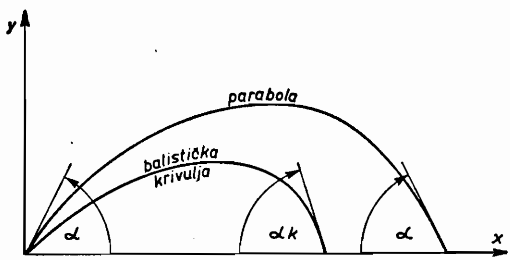
$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha}$$

Ukupno vrijeme leta projektila od izbacivanja iz oružja do udara u Zemlju jest

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$x = D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

pa je $$\boxed{t = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g}}$$



Sl. 86.

U zrakopraznom prostoru krivulja kosog hica je simetrična, tj. uzlazna grana jednaka je silaznoj. Međutim u zraku će zbog otpora zraka staza biti nesimetrična i silazna će grana biti strmija od uzlazne. Ta krivulja kosog hica s nesimetričnim granama zove se balistička krivulja (sl. 86). Da bi se postigao što veći domet, mora biti velika početna brzina i veliki elevacioni kut, te najpovoljniji oblik projektila tako da bi on mogao ući u zonu razrijeđenog zraka u tzv. stratosferu, gdje je otpor mnogo manji nego u nižoj zoni, u tzv. troposferi, koja dosiže do 12 km visine.

ZADACI

1. Projektil je izbačen pod kutom $\alpha_1 = 35^0$, brzinom $v_0 = 250\ \mathrm{ms}^{-1}$. Odredi domet *D*, visine penjanja i vremena penjanja za kutove α_1 i α_2!