npr., linearna jednadžba $0x=2$ očigledno nema rješenja, tako se i pitanje da li zadan linearni sistem ima ili nema rješenja svodi putem eliminacije na slično pitanje: *ako nas eliminacije ne dovedu do apsurda* $0=top$, *znak je to da je rješenje linearnog sistema osigurano i da je to baš ono koje smo usput dobili ili ga već gotovo dobili.*

Dokaz gornjih tvrdnji iznijet ćemo u poglavlju 15. o rangu matrica.

2.7. Gaussov postupak pri rješavanju linearnih jednadžbi s *numeričkim koeficijentima*. Gaussov postupak je specijalan slučaj metode protivnojednakih koeficijenata.

Inače, možemo pretpostaviti da radimo sa sređenim sistemom linearnih jednadžbi.

2.7.1. *Kod Gaussova postupka je važno da u zadanom sistemu S jednadžbi odaberemo* ***jednu jedinu jednadžbu — vodeću jednadžbu*** i u njoj određenu **nepoznanicu**, odnosno ***vodeći član.*** Pred vodeću jednadžbu stavimo zvjezdicu da je lakše i bolje vidimo. Vodeći član u vodećoj jednadžbi markiramo također, npr. tako da ga uokružimo, podvučemo, uokvirimo i sl. Vodeću nepoznanicu ćemo eliminirati tako da primijenimo metodu protivno-jednakih koeficijenata, i to sparujući tu vodeću jednadžbu i **svaku** ostalu jednadžbu sistema.

Na tako dobiveni sistem jednadžbi primjenjuje se opet isti postupak, itd. do kraja.

2.7.2. *Rješenja sistema S' tako dobivenih »vodećih jednadžbi« podudaraju se s rješenjima polaznog sistema S.*

2.7.3. Izbor vodeće jednadžbe i vodeće nepoznanice. Izbor se vrši prema karakteru samog sistema jednadžbi. U praksi se obično radi ovako:

a) Uoči se ona nepoznanica x_k uz koju stoji koeficijent *najveće apsolutne* vrijednosti.

b) Zatim se ona, odnosno jedna jednadžba u kojoj dotični član dolazi, proglasi za vodeću; neka je to jednadžba i.

c) Ta se vodeća jednadžba i pomnoži recipročnom vrijednošću *»vodećeg koeficijenta«*; dakle se jednadžba i pomnoži sa a_{ik}^{-1}; time se dobije jednadžba J.

d) Zatim se ta nova jednadžba J pomnoži, za svaku jednadžbu $j \neq i$, koeficijentom $-a_{jk}$ od x_k u jednadžbi j i napravi suma te nove jednadžbe i jednadžbe J.

Time se dobije novi sistem jednadžbi s nepoznanicama bez x_k u svima jednadžbama osim u jednoj. Na taj novi sistem primjenjuje se opet isti postupak: izabere se u njemu vodeća jednadžba i vodeća nepoznanica...

2.7.4. Zbirna kontrola. U praksi se uz svaku zadanu jednadžbu sistema nadopisuje u *poseban stupac* još i *suma svih njenih koeficijenata, pa se s tim sumama radi isto što i sa članovima dotične jednadžbe;* u svakoj novoj jednadžbi koja se pri postupku dobije mora suma njenih koeficijenata biti jednaka broju koji se Gaussovim postupkom dobio na tom mjestu.

2.7.5. Važan slučaj iz prakse. Često se ima posla sa skupovima po n jednadžbi po n nepoznanica, no da *koeficijenti pri nepoznanicama ostaju isti: mijenjaju se samo desne strane. Time se podaci o rješavanju jednoga takvog sistema mogu upotrijebiti i za druge sisteme: ostaje sve isto osim onog dijela što se odnosi na desne strane.*

2.7.6. *Specijalno je važan slučaj kad su desne strane* ***»jedinični nizovi«***, tj. nizovi sastavljeni od samih 0 osim jedne jedine 1. Ako je, npr., riječ o tri jednadžbe s tri nepoznanice, desne strane bi po redu bile:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{(ovo čitaj po stupcima!).}$$

Pripadna su rješenja u vrlo pravilnoj vezi s rasporedom koeficijenata nepoznanicâ (isp. izračunavanje inverzne matrice a^{-1} zadane matrice a; poglavlje 12; § 5).

2.8. Zadaci o numeričkom rješavanju linearnih jednadžbi.

1. Primijeni topovski postupak i riješi ove jednadžbe; provedi zbirnu kontrolu i pokus.

1) $$\begin{aligned} -2x+3y+4z&=-8\\ 2x-3y+4z&=-16\\ 2x+3y-4z&=20. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x+5y+4z&=0\\ -6x-2y+5z&=1\\ 7x+y-9z&=-2. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+3x_3+x_4&=-29\\ -x_1+2x_2-3x_3+2x_4&=-2\\ 2x_1-4x_2+x_3-5x_4&=29\\ x_1+3x_2-x_3-x_4&=-2. \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 3x-0{,}2y+0{,}03z&=4\\ 6x+3{,}5y+4{,}1\,z&=2{,}3\\ 8x-12\,y+0{,}4\,z&=6. \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=5\\ x_1-x_2-x_3+x_4&=3\\ 2x_1-3x_2-4x_3+5x_4&=-12\\ x_1+x_2-x_3+2x_4&=5 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} 5x-4y+3z+u&=-8\\ 2x-3y-z&=-1\\ 9x+7y-2u&=-9\\ -x+4y+z+3u&=0. \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=2\\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4&=3\\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4&=4\\ x_1-2x_2+x_3-6x_4&=1. \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} 3a+4b-c-3d&=-1\\ a-b+2c-3d&=0\\ a+3b+c+d&=0\\ a+b+c+d&=0. \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} 3u_1+4u_2-u_3-3u_4&=-1\\ u_1-u_2+2u_3-3u_4&=0\\ u_1+3u_2+u_3+u_4&=0\\ u_1+u_2+u_3+u_4&=0 \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_n&=1\\ x_1+x_3+x_4+\cdots+x_n&=2\\ x_1+x_2+x_4+\cdots+x_n&=3\\ \cdots\cdots&\cdots\\ x_1+x_2+\cdots x_{n-1}&=n. \end{aligned}$$

2. Riješi ove skupove jednadžbi stavljajući na desnu stranu sve moguće odgovarajuće jedinične normirane vektore tj. jedinične nizove:

1) $$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1\\ 5x-y&=0 \end{aligned}\,\right|\,\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$$

2) $$\begin{aligned} 3x+5y-4z&=\\ 2x-3y+z&=\\ 6x+y-14z&= \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} a-3b+4c-2d&=\\ -2a+b-2c+d&=\\ 3a-2b+5c-2d&=\\ -4a+b+2c+3d&= \end{aligned}$$

Literatura: Faddejev-Faddejeva [1], Faddejev-Sominskij [1], Greub [1], Lichnerowicz [1], Mal'cev [1], Mitrinović-Mihailović [1], van der Waerden [1].

POGLAVLJE 9.

SISTEM LINEARNIH JEDNADŽBI S OPĆIM KOEFICIJENTIMA. POJAVA DETERMINANTE

1. DVIJE LINEARNE JEDNADŽBE. DETERMINANTE STUPNJA (2,2)

1.1. Neka za nepoznate veličine x, y vrijedi:

(1)
$$\begin{array}{r|l} ax+by=c & \cdot b' \\ a'x+b'y=c' & \cdot -b \end{array}\; + \;\begin{array}{|l} \cdot -a' \\ \cdot a \end{array}\; +$$

Pri tom su a, b, c, a', b', c' brojevi ili brojevni izrazi.

Pomnožimo prvu jednadžbu sa b', odnosno $-a'$, te drugu jednadžbu sa $-b$, odnosno a, i zbrojimo dobivene jednadžbe (taj smo posao naznačili u (1) simbolički s onim što smo pripisali desno od c-ova).

Dobijemo ove dvije jednadžbe:

(2)
$$\begin{aligned}(ab'-a'b)\,x &= b'c-bc'\\ (ab'-a'b)\,y &= ac'-a'c.\end{aligned}$$

1.2. Sistem (2) je *naročito jednostavno i pregledno građen;* naime;

1) *u svakoj jednadžbi sistema* (2) *dolazi jedna jedina od napisanih nepoznanica polaznog sistema* (1);

2) *koeficijent od svake nepoznanice u* (2) *je jedan te isti izraz naročito pravilno građen od koeficijenata svih nepoznanica u* (1);

(3) *i desna strana u novom sistemu* (2) *ima sličnu građu* (*strukturu*) kao i koeficijent nepoznanica u (2); ta se struktura sastoji u tom da se radi *o razlici dvaju produkata po dva faktora.*

1.3. D e f i n i c i j a. Izraz $ab'-a'b$ zovemo *determinantom* ili *opredjeliteljem jednadžbi* (1) ili *pravokutne tablice*

$$\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$$

i ta se determinanta označuje sa

$$\det\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix} \quad \text{ili} \quad \det\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad D\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix};$$

tj. oznaka determinante dobije se iz oznaka tablice tako da se pred tablicu stavi det ili D ili da se tablica stavi u *uspravne zagrade*. Prema tome

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b. \tag{3}$$

Smisao te definicione jednakosti sastoji se u tome da se *jedna strana jednakosti* (3) *može svuda zamijeniti drugom stranom te jednakosti* (3). Tako npr.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 7 \cdot 3 = -1$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x \,(=1)$$

$$2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \text{ itd.}$$

1.4. Koeficijenti nepoznanica tvore »*tablicu koeficijenata*« pa se zovu *elementi* ili *članovi* ili *koordinate* ili *komponente te tablice.* Radi preglednosti, običaj je da se tablica stavi u *uglaste zagrade.* Ako tablicu koeficijenata proširimo i „stupcem" ostalih koeficijenata jednadžbe, dobije se »*proširena tablica*« zadanog sistema jednadžbi (1); ona glasi:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}. \tag{4}$$

1.5. Réci ili redići, stupci i dijagonale pravokutnih tablica. Govori se o *prvom retku* ili *drugom* retku te tablice (4) ili kakve druge tablice. Specijalno u tablici

$$\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$$

koeficijenata nepoznanicâ jednadžbi (1) prvi redak ili prvi redić glasi $a\ b$; drugi redak glasi $a'\ b'$; prvi stubac je a; drugi stupac je b. Glavna dijagonala je
a' b'
$a,$ odnosno $a\,b'$; ona počinje lijevo gore. Sporedna dijagonala je $b,$ odno-
b' a'
sno $b\ a'$, jer čitamo i pišemo najprije ono što je u gornjem retku pa onda ono što je u narednom retku. Sporedna dijagonala počinje desno gore.

1.6. *Retke numeriramo rednim brojevima* 0, 1, 2. . . . ili *prirodnim brojevima* 1, 2. . . . *odozgo prema dolje; stupce numeriramo slično, i to od lijeve strane prema desnoj strani.* Tako se govori o prvom retku, drugom retku itd. Isto vrijedi i za stupce: prvi stupac, odnosno po redu prvi stupac, drugi stupac itd.

Npr. u pravokutnoj tablici

3	4	5	redak prvi
-1	3	2	redak drugi
4	1	8	redak treći

redak drugi glasi -1 3 2.

Glavna „dijagonala" je 3 3 8; a sporedna dijagonala je 5 3 4. „Sjecište" ili „polje" (1, 1) je zauzeto sa 3; ono drugo 3 leži u sjecištu (2, 2). Dijagonala koja završava dolje desno glasi 3 3 8; a ona koja završava dolje lijevo glasi 5 3 4.

1.7. Oblast (domen) ili stupanj tablice. Ako pravokutna tablica t ima r redaka i s stupaca, kaže se da je ona oblasti, ili poretka ili stupnja $r \times s$ ili potpunije $1(r) \times 1(s)$ i piše $\operatorname{Dom} t = r \times s$ ili potpunije $\operatorname{Dom} t = 1(r) \times 1(s)$; sjetimo se da $1(r) = \{\underbrace{1, 2, \ldots}_{r}\}$.

Umjesto $r \times s$ možemo pisati (r, s) odnosno $(1(r), 1(s))$.

1.8. Definicija determinante za tablicu stupnja 2×2. *Determinanta* ili *opredjelitelj pravokutne* — zapravo kvadratne — *tablice* stupnja 2×2 jest razlika produkta elemenata u tablici na glavnoj dijagonali i produkta onih elemenata koji su na sporednoj dijagonali.

Npr. $c = \begin{vmatrix} c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ za svaki izraz c; $0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ čak je $0 = \begin{vmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

za bilo kakve brojevne izraze m, n.

1.9. Upotreba pojma i oznake za determinante. Smisao gornje definicije i oznake gornje determinante sastoji se u tome da se na pregledan način vidi veza između determinante i njenih elemenata prema ulozi koju ti elementi imaju. Ta će se ideja vidjeti osobito kasnije, kad nam pod ruku dođu determinante s mnogo više elemenata.

1.10. ***Cramerov teorem*** *(u specijalnom slučaju) glasi ovako:*

Iz

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

izlazi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Riječima: iz zadanog sistema jednadžbi (1) *izlazi drugi sistem, koji je građen ovako: svaku nepoznanicu sistema* (1) *pomnožimo determinantom sistema* (1) *i napišemo da je taj produkt jednak determinanti koja iz determinante zadanog* *sistema* (1) *izlazi tako da u njoj stupac koji odgovara dotičnoj nepoznanici zamjenimo onim što stoji na desnoj strani sistema* (1).

1.11. Cramerov teorem. *Vrlo je plodna naučna tekovina da taj izraz vrijedi ne samo za linearan sistem od 2 jednadžbe s 2 nepoznanice nego za svaki konačan linearan sistem koji ima toliko jednadžbi koliko ima nepoznanica. To je tzv. Cramerov teorem*[1] (za dokaz vidi pogl. 11 teor. 7.9.2. i 12, § 2.1.2).

1.11.1. Tako npr. iz

$$(1)\qquad \begin{aligned} 3x+5y&=-4\\ 2x-7y&=3 \end{aligned}$$

izlazi odmah
$$\begin{vmatrix} 3 & 5\\ 2 & -7 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -4 & 5\\ 3 & -7 \end{vmatrix},$$

tj.
$$(-21-10)\,x=28-15, \quad \text{tj.} \quad -31x=13,$$

dakle
$$x=-13/31=-0{,}4\ldots$$

Slično
$$-31y=\begin{vmatrix} 3 & -4\\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{tj.} \quad -31y=17, \quad \text{tj.} \quad y=-17/31.$$

1.11.2. Iz jednadžbi

$$(1)\qquad \begin{cases} 2x+5y-4z=2\\ x-2y+z=5\\ 4x+5y-7z=0 \end{cases}$$

izlazi

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4\\ 5 & -2 & 1\\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4\\ 1 & 5 & 1\\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2\\ 1 & -2 & 5\\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

[1] Gabriel Cramer [Kramer] (1704—1752): *Introduction à l' analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1790. (*Uvod u analizu algebarskih krivulja*). Tim djelom uvedene su determinante u naučnu literaturu.

1.11.3. Općenito (za dokaz vidi pogl. 11, 7.9.2.), ako imamo n nepoznatih veličina

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

i n jednadžbi oblika[1)]

$$
\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = c_1 \\
(5) \qquad &a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = c_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = c_n,
\end{aligned}
$$

tada je

$$
\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} c_1 & \\ \vdots & \text{Sve drugo} \\ \vdots & \text{ostaje} \\ c_n & \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & c_n & a_{n3} & \cdots \end{vmatrix}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & c_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & c_n \end{vmatrix}.
$$

Samo nastaje pitanje: što zapravo znači determinanta sistema linearnih jednadžbi (5) kad u njemu ima 3 ili više nepoznanica, tj. kad je $n \geq 3$?

Tako npr. šta bi značila determinanta trećeg stupnja:

$$
? = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?
$$

1.12. Geometrijsko značenje determinante. Pogledajmo šta geometrijski zapravo znači determinanta

$$
\begin{vmatrix} a & b \\ a & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.
$$

Radimo u koordinatnoj ravnini. Svaki **stupac** koeficijenata sistema naših jednadžbi određuje jednu tačku; tako imamo tačke:

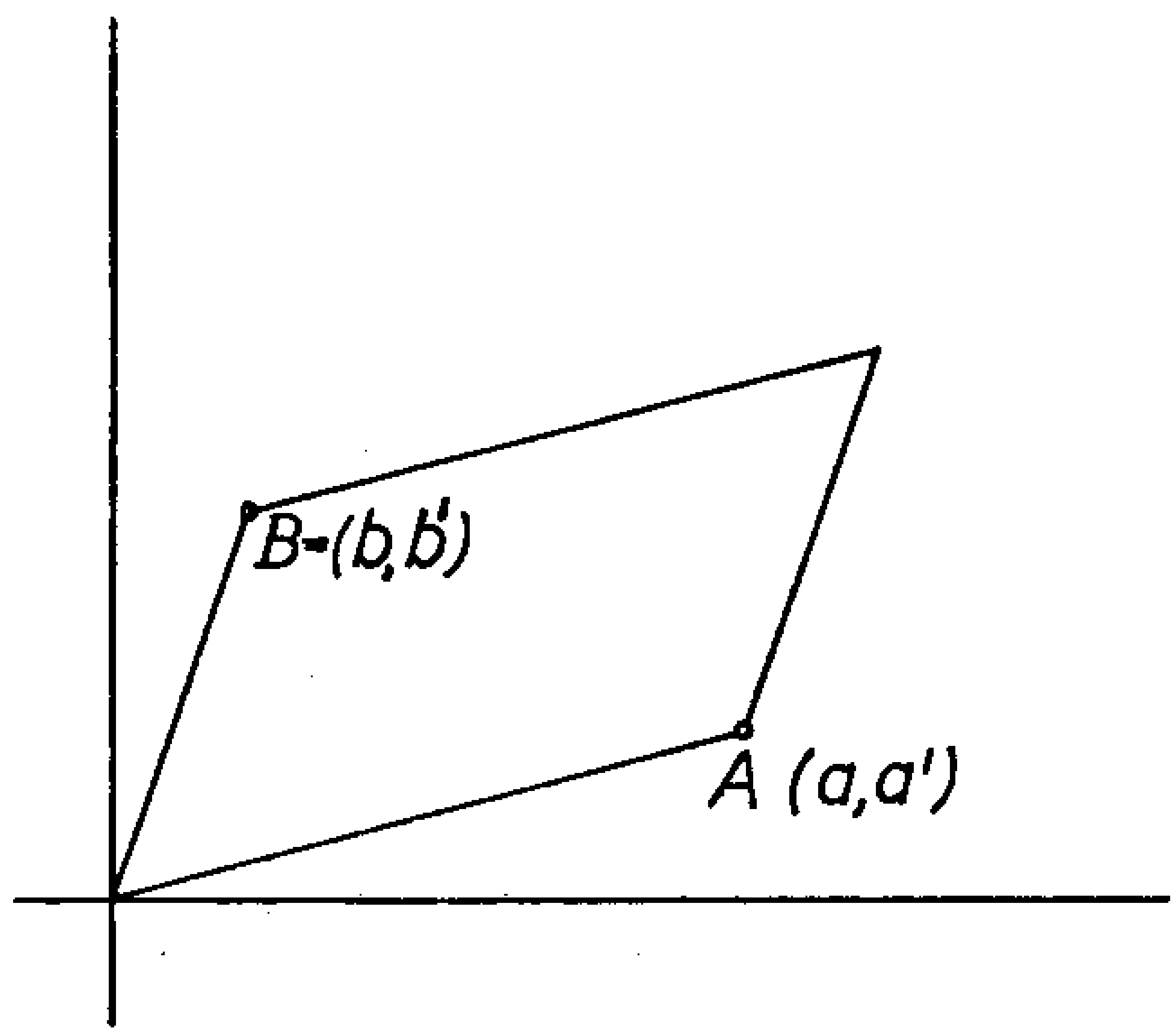
$$A = (a, a')$$

$$B = (b, b')$$

$$C = (c, c')$$

i pripadne radijus-vektore

$$\overrightarrow{OA}, \ \overrightarrow{OB}, \ \overrightarrow{OC}.$$



Sl. 9.1.12.

[1)] Jednadžbe (5) ne moraju biti linearne u odnosu na $x_1, x_2, \cdots, x_n$.