POGLAVLJE 15.

RANG MATRICE

0. UVOD I PRIPRAVA

0.0. Dosad smo se služili rangom za matrice a koristeći se ovim glavnim svojstvom o linearnoj nezavisnosti: kod matrica, odnosno jednadžbi: broj r_a (kao maksimalni stupanj neke nesingularne podmatrice Ma u a) kazuje ujedno koliko matrica a ima nezavisnih redaka (stupaca), odnosno koliko u sistemu jednadžbi

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{k'\nu} x_\nu = 0 \quad (k' \in 1\,(k) = \{1, 2, \ldots, k\})$$

ima linearno nezavisnih jednadžbi. Svakako, poznavanje bar jedne *regularne* submatrice $Ma \subset a$ *maksimalnog* reda mnogo je dragocjenije nego poznavanje pukog broja r_a koji kazuje koliko matrica Ma ima nezavisnih redaka ili stupaca. Stvarno, Ma nas dovodi do reducirane jednadžbe $a(Ma)\vec{x} = \vec{0}$ ekvivalentne sa $a\vec{x} = \vec{0}$, odnosno do reduciranog podsistema zadanog sistema (1).

0.1. No, *traženje* broja r_a dovodi nas i do *M-submatrica*, stanovitih matrica dovoljno čvrsto vezanih za a, tako da odatle možemo povući korisne zaključke i o samoj polaznoj matrici (odnosno sistemu jednadžbi u kojem se a pojavljuje). Pri tom mislimo specijalno na reduciranje matrica a na *T-matrice* (*topovsko reduciranje i eliminiranje*); a korist što je od takve redukcije imamo upoznali smo već u pogl. 8, § 2.6). *Rang svake T-matrice t upravo je jednak broju položaja takvih nezavisnih rubnih njenih topova ispod kojih nema nikojeg topa matrice, a drže pod paljbom svaki redak matrice u kojem se nalazi bar jedan top* (ovdje „top“ matrice znači svaki njen element $\neq 0$). Permutacijom redaka prelazi svaka T-matrica u određenu $\overline{\diagdown|}$-matricu ($\overline{\diagdown|}$-matrice zovu se i *gornjotrokutne matrice*; kod njih su svi elementi *ispod* dijagonale jednaki 0; dualno su: $\underline{|\diagdown}$-matrice ili *donjotrokutne matrice*; kod njih su komponente *iznad* glavne dijagonale jednake 0).

0.2. Nadalje ćemo u ovom poglavlju pobliže upoznati nekoliko svojstava ranga, specijalno *da se rang r_a matrice a ne mijenja pri vršenju tzv. elementarnih transformacija nad a* [*matrični odraz operacijâ kojima se svakodnevno služimo pri rješavanju jednadžbi* (množenja jednadžbi s brojevima $\neq 0$, zbrajanje jednadžbi)].

To će nas dovesti do saznanja da je *svaka matrica a »ekvivalentna« s normiranom matricom posebnog oblika*

$$k\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r} & \\ & \end{bmatrix}}_{n}\right..$$

Zvuči čudnovato kad se čuje da se *svaka matrica a tipa* (k, n) *i ranga r može elementarno svesti na taj normalni oblik*, odnosno obratno, da se a iz tog normiranog oblika $\nu=\nu(k, n, r)$ može *rekonstruirati* relacijom $a=x\nu y$, gdje su x i y *regularne kvadratne matrice*. Dokazat ćemo, naime, da vrijedi ovaj

0.3. Glavni teorem o rangu i ekvivalenciji matrica. Za matrice a, b ova četiri suda (0)—(3) međusobno su logički ravnopravna:

$$(0) \qquad k_1 a\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \cdot & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r_a} & \\ & 0 \end{bmatrix}}^{k_2 a}\right. = \left.\overbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \cdot & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r_b} & \\ & \end{bmatrix}}^{k_2 b}\right\} k_1 b.$$

Pri tom $k_1 a$ (odnosno $k_2 a$) kazuje koliko a ima redaka (stupaca).

(1) Prvi sud: *Matrice a, b su istog poretka* (k, n) *i istog ranga.*

(2) Drugi sud: *Matrice a i b su ekvivalentne* $(a\sim b)$ *u tom smislu da se jedna iz druge može izvesti pomoću konačnog broja »elementarnih« transformacija.* (v. § 4.1. i § 6.0. definicija).

(3) Treći sud: *Matrična jednadžba* $xay=b$ *dopušta neko rješenje* x, y *sa svojstvima* $\det x\neq 0$, $\det y\neq 0$ (*dakle su x i y regularne kvadratne matrice*).

0.4. Posebno, odatle izvire (zaključak (1) $\Leftrightarrow$ (3)) da se množenjem matrice s regularnom kvadratnom matricom rang ne mijenja.

0.5. Ako se još doda da je rang dijagonalne matrice jednak broju njenih topova na dijagonali, onda je već ukazano glavnim teoremom da ćemo, služeći se elementarnim transformacijama i množenjima, nastojati zadanu matricu a prevesti na što jednostavniji oblik (trokutni, dijagonalni, ..., odnosno sa što više 0) — slično kao što smo npr. kod Gaussova algoritma nastojali da iz jednadžbi uklonimo što više nepoznanica.

0.6. Tako npr. ako u matrici vidimo da joj je jedan redak ρ jednak s drugim retkom ili da se može izraziti linearno pomoću ostalih redaka, može se čitav taj redak odmah nadomjestiti samim nulama — rang se tim prelazom ne mijenja!

0.7. Imajmo na umu *korist od poznavanja ranga matrica*; ta je korist iskazana u osnovnom teoremu o nezavisnosti unutar matrica (teorem 10.3. o matricama i osnovni teorem 5.5. u pogl. 11). Izrecimo taj teorem i ovom prilikom:

0.8. Ako matrica a ima konačan broj redaka ili stupaca (ili oboje), tada za svaku njenu M-podmatricu $M(a)$ (v. definiciju 2.1) pripadni redići (stupci) matrice a predstavljaju maksimalan broj linearno nezavisnih redaka (stupaca). Drugim riječima, broj ra pokazuje dimenziju prostora što ga razapinju reci (stupci) matrice a.

1. RANG I M-PODMATRICE NEKIH MATRICA

1.0. Definicija. M-podmatrica matrice a, simbolički Ma, jest bilo koja kvadratna regularna podmatrica maksimalne duljine.

1.1. Definicija. Rang ra matrice a je supremum duljinâ $k_2 x$ kvadratnih regularnih podmatrica x u a. Matricama s jedinim vrijednostima 0 pridjeljuje se 0 kao rang.

Primjer. Očigledno je

$$r\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & \cdot & \cdot & \\ 0 & 1 & \cdot & \text{proizvoljno} \\ 0 & 0 & 3 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot \end{array}\right]=3.$$

Tu je odmah uokvirena M-matrica

$$\begin{bmatrix} 3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Singularnost svake podmatrice x stupnja >3 proizlazi iz činjenice što x ima nužno 0-niz kao svoj četvrti redak (inače x može imati i ∞ mnogo redaka).

Najjednostavnije je rang ra i podmatricu Ma odrediti kad matrica a ima mnogo nulâ. U tom pogledu evo jednog vrlo korisnog teorema:

1.2. Teorem. *Ako matrica a u svakom stupcu ima najviše jednu vrijednost $\neq 0$, tada je rang ra jednak broju redaka u a koji nijesu $=\vec{0}$; ako se iz a uklone svi reci koji su 0 i svi stupci koji su 0, tada se u preostatku u lijevom kraju pojavljuje matrica Ma.*

Npr.

$$r\begin{bmatrix} 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 3; \text{ brisanjem } \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 4 \end{array}\right]; \ Ma \text{ je uokvireno.}$$

D o k a z t e o r e m a. Brisanjem svih konstantnih redaka i stupaca u a koji su 0 dobije se određena matrica b; u njoj svaki stupac ima jednu jedinu vrijednost $\neq 0$; ako nije $b_{11} \neq 0$, nego je $b_{i1} \neq 0$, tada se transpozicijama redaka $b_{i\cdot}, b_{i-1\cdot}, \ldots, b_{1\cdot}$ redak $b_{i\cdot}$ dovede da postane prvi redak. Npr. ako je

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tada odatle izlazi } \begin{bmatrix} b_{1\cdot} \\ b_{3\cdot} \\ b_{2\cdot} \\ b_{4\cdot} \end{bmatrix},$$

$$\text{pa dalje } \begin{bmatrix} b_{3\cdot} \\ b_{1\cdot} \\ b_{2\cdot} \\ b_{4\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = d;$$

sad se u d promatra kofaktor f_{11} i na njemu, unutar d, vrši odgovarajući proces: to daje prelaz

$$d \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] = e;$$

vidimo ovo: uokvirena submatrica x poretka 4×4 na početku matrice e je trokutna; vrijednost determinante je $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4$, tj. $\det x \neq 0$. No, matrica e obrnutim nizom transpozicija dolazi natrag u matricu b; pri tom iz matrice x nastaje određena podmatrica y od b; naravno, $\det y = \det x$ ili $\det y = -\det x$; dakle je $\det y \neq 0$, tj. $y = Ma$. A za tim i idemo. Slično je u općem slučaju.

1.3. Lema. Rang matrice a koja je izvan dijagonale jednaka 0 jednak je broju nenultih vrijednosti na dijagonali. Brisanjem u a svih konstantnih redaka i stupaca koji su 0 dobiva se *jedina* M-podmatrica Ma matrice a.

Npr.

$$a=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 2 & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} = Ma.$$

2. PREVOĐENJE MATRICE U TZV. T-OBLIK. DOKAZ OSNOVNOG TEOREMA

2.0. Već u pogl. 8., § 2.6. upoznali smo se s jednim praktičnim postupkom kako se rješavaju linearne jednadžbe. Ideja se sastoji u ovom: u prvoj jednadžbi u kojoj svi koeficijenti nisu $=0$ treba odabrati *top* (tj. jedan koeficijent $\neq 0$) i metodom protivno-jednakih koeficijenata ukloniti sve druge topove *ispod* izabranog. U tako dobivenim jednadžbama proces iterirati itd. Skup jednadžbi s „topovima“ ekvivalentan je sa skupom zadanih linearnih jednadžbi.

2.1. Opis postupka. Preneseno na matrice, to govori ovo: u zadanoj matrici promatrati *prvi redak* u kojem se nalazi bar jedan top[1]; *jednog od njih, t_1, izabrati, markirati i pomoću njega ukloniti svaki eventualni drugi top t ispod t_1, i to* ovom *»elementarnom« L-operacijom na recima: redak od t_1 pomnožiti sa $-t/t_1$ i rezultat dodati retku u kojem je top t.* U novonastaloj situaciji proces se iterira. Pogledati da li se u novoj matrici nalazi koji top *nezavisan* od t_1; ako se nalazi, izabrati i markirati jedan, t_2, iz *prvog mogućeg retka,* uništiti paljbom (operacija s *L-recima*) svaki eventualni top ispod t_2 itd.

Na taj se način dobije najzad određena matrica a_T i u njoj određen niz osobitih markiranih topova $t_1, t_2, \ldots$; ti su svi topovi na $\neq$ stupcima i $\neq$ recima (ne mogu se gađati međusobno), *svaki* redak u a_T *s bar jednim topom* sadrži i *jedan osobit*; najzad, *niže od osobitih topova nema nikojeg drugog topa. Broj tih osobitih topova, tj. broj markiranih mjesta, jest ra_T* (rang matrice a_T); najmanja podmatrica $\subset a_T$ kojoj oblast obuhvata sva ta osobita mjesta topova upravo je jedna M-podmatrica (podmatrica najobuhvatnijeg područja s determinantom $\neq 0$).

2.2. Definicija T-matrica i $\vdash\!\dashv$-matrice. Primjeri. — **2.2.0.** Kaže se da je zadana matrica a jedna *T-matrica* ako sadrži jedan podskup S topova s ovim svojstvima:[2]

---

[1] Top matrice je svaka njena vrijednost $\neq 0$. Radi slikovitosti zgodno se služiti riječju top. Izboru „osobitih topova“ u praksi će se ipak posvetiti malo više pažnje, npr. tako da retke međusobno uredimo, recimo da kao prvi redak nastupi onaj s najviše topova i s najizrazitijim topovima. Ili npr. da se najglomazniji topovi stave na dijagonalu ili da topovi budu 1, -1 itd.

[2] Znajmo da je S podfunkcija funkcije a.

(I) *Svaki redak matrice u kojem se nalazi bar jedan njen top sadrži i jedan top iz S.*

(II) *Ispod topova u S nema nijednog topa matrice.*

(III) *Topovi u S međusobno se ne gađaju* tj. bilo koja dva od njih smještena su u različitim recima i različitim stupcima matrice.

Nula-matrice smatramo T-matricama.

Transponati T-matrica zovu se $\vdash\!\dashv$ *-matrice.*[1]

Kraće možemo govoriti da je *S istaknut skup topova u promatranoj matrici a* ili, što je pravilnije: *S je istaknuta podfunkcija od a.* Istaknute topove možemo uokviriti i sl.

Evo primjera T-matrica:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \boxed{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{4} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & 5 & 0 & 0 & 6 \\ \boxed{1} & 0 & . & . & . & . \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

Evo primjera matrice koja nije T-tipa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

i to iz razloga što u njenom prvom retku ne možemo izabrati istaknuti top (uslov 2!).

2.2.1. L e m a. Svaki redak, svaka dijagonalna matrica, svaka matrica bez topova ispod dijagonale — sve su to primjeri T-matrica, bez obzira na broj stupaca. Svaki stupac s posljednjim članom također je T-matrica. Npr.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ je } T\text{-matrica;}$$

transponat matrice $[1, 2, 3, \ldots]$ mnogosti $\mathbf{N}$ nije T-matrica.

2.3. Definicija L-postupka s matricom. — 2.3.0. Izvršiti *elementaran ili jednočlan L-postupak na recima matrice* znači jednom *retku* matrice pribrojiti neki *drugi redak iste matrice pomnožen brojem.*[2]

2.3.1. *Složen L-postupak s recima* jest onaj pri kojem se jednom retku matrice pribroji linearna kombinacija konačne množine drugih redaka matrice.

---

[1] Nazivi *T-matrica* i $\vdash\!\dashv$ *-matrica* u vezi su s početnim slovom riječi *top* ili *tvrđava* kao i posebnom građom tih matrica.

[2] To je operacija koja odgovara svakidašnjem poslu s jednadžbama.

2.3.2. Analogno se definiraju elementarne i složene L-operacije sa *stupcima* matrice.

2.3.3. P r i m j e d b a. Slovo L u gornjem nazivu je početno slovo riječi »*linearan*«, odnosno »*linija*«.

Npr. za matricu

$$a = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

daje L-operacija $a_2. - 5/3\ a_1.$ matricu

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -\dfrac{17}{3} & -\dfrac{13}{3} & -\dfrac{34}{3} \end{bmatrix}.$$

2.4. Osnovni teorem o prevođenju matrice u T-matrice.

⟶ 2.4.0. (a) Svaka matrica a koja ima konačno mnogo redaka može se pomoću konačno mnogo elementarnih L-operacija s récima (isp. definiciju 2.3) prevesti u jednu T-matricu a_T istog domena, tj. oblasti: $\mathrm{Dom}\, a_T = \mathrm{Dom}\, a$. To znači da postoji konačan niz matrica $A_0 = a$, A_1, $A_2, \ldots, A_s = a_T$, u kojem svaki član A_l osim prvog izlazi iz prethodnog člana A_{l-1} jednom elementarnom L-operacijom L_{l-1} redaka matrice A_{l-1}.

(b) U svakom istaknutom skupu S topova u dobivenoj matrici a_T ima upravo $r(a_T)$ topova (gdje ra_T označuje rang matrice a_T).

(c) Polja što ih zauzimaju topovi iz S zajedno s poljima što ih tuku po dva topa iz S određuju jednu M-podmatricu Ma_T u a_T, tj. maksimalnog reda regularnu kvadratnu podmatricu u a_T.

(d) $ra = ra_T$ (matrice a, a_T imaju isti rang).

(e) Ako je a kvadratna konačna matrica duljine n, tada je

$$\det a = \det a_T.$$

(f) Ako je $k(S) < n$, onda je $\det a = 0$. Ako je $k(S) = n$, onda je $\det a = (-1)^I \prod_{\dot{S}} \dot{S}$; pri tom naznačeni produkt kazuje rezultat izmnažanja svih markiranih topova u S; I označuje sumu indeksâ (tj. prvih i drugih indeksa) svih topova u S[1].

To je formulacija osnovnog teorema na slikovitom jeziku. Ta je formulacija lakša od strogo funkcionalne, koja glasi ovako:

---

[1] Ne gubimo s uma činjenicu da je svaka matrica određena funkcija na Descartesovu pravokutniku kojoj podfunkcije smatramo podmatricama samo onda ako su im domeni Descartesovi kvadri! Sjetimo se da je $D_1 T$ prva projekcija domena od T; $D_2 T$ je druga projekcija od Dom T.

2.4.0^{bis} Teorem;

(a) **Svaka matrica a koja ima konačno mnogo redaka može se pomoću konačno mnogo elementarnih L-operacija s redićima (isp. definiciju 2.3) prevesti u jednu T-matricu a_T (definicija 2.2) istog domena: Dom a_T = Dom a. To znači da postoji konačan niz matrica: $A_0 = a, A_1, A_2, \ldots, A_s = a_T$, u kojem svaki član A_{l-1} osim prvog izlazi iz prethodnog jednom elementarnom L-operacijom L_{l-1} redaka matrice A_l.**

(b) **Za svaku odlikovanu potfunkciju S dobivene matrice a_T, tj. za svaku odlikovanu restrikciju $a_T | M$ funkcije a_T vrijedi $k\,\mathrm{Dom}\, S = kM = ra_T$ (k (Dom S) znači kardinalni broj oblasti funkcije S).**

(c) **Potfunkcija $a_T | D_1 S \times D_2 S$ je jedna M-podmatrica u a_T.**

(d) $ra = ra_T$.

(e) **Ako je a kvadratna konačna matrica duljine n, tada je $\det a = \det a_T$.**

(f) **Ako je $k(\mathrm{Dom}\, S) < n$, onda je $\det a = 0$. Ako je $k(\mathrm{Dom}\, S) = n$, onda je $\det a = (-1)^{\sum_{(i,j)} (i+j)} \prod_{(i,j)} (a_T)_{ij}$, pri čemu je $(i, j) \in \mathrm{Dom}\, S$.**

Dokaz teorema svodi se na dokaz jednakosti $\mathrm{Dom}\, a = \mathrm{Dom}\, a_T$, jednakosti $ra = ra_T$ (v. § 2.4.4) i dokaz teorema 2.4.5. o T-matricama.

2.4.1. Ilustracija prevođenja a u a_T:

$$a = \begin{bmatrix} 5 & \boxed{-1} & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot -1 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 5 & \boxed{-1} & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \;\cdot -2$$

(tu smo naznačili dva elementarna postupka)

$$\begin{bmatrix} 5 & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -7 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot 4 \;\cdot -7 \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 5 & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = a_T.$$ Dakle je $r(a_T) = 3 = r(a)$.

Označeni topovi razapinju u a_T podmatricu

$$Ma_T = \begin{bmatrix} 5 & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{bmatrix}, \text{ kojoj je determinanta } 2.$$

2.4.2. *Opis puta od a do a_T.* To smo opisali u § 2.1, a vidi se i iz gornjeg primjera.

2.4.3. Lema. *Pri elementarnim L-transformacijama matrice oblast se i rang te matrice ne mijenjaju.*

2.4.3.0. Neka je, dakle, a matrica; neka b izlazi iz a elementarnom transformacijom. Treba dokazati da je $\mathrm{Dom}\, a = \mathrm{Dom}\, b$, te $ra = rb$. Prva je jednakost očigledna — uostalom, spomenut ćemo je u toku dokaza jednakosti $ra = rb$. Pa neka je c jedna regularna podmatrica u a stupnja $r = r(a)$. Prema osnovnom teoremu u pogl. 11, § 10.3, svaki redak u a je linearan spoj od onih r redaka iz kojih je uzeto c. A sada, kako b iz a nastaje jednostavnom L-operacijom: da se nekom određenom retku $a_{i\cdot}$ doda $\lambda a_{j\cdot}$, gdje je $i \neq j$, pa time dobije redak $b_{i\cdot} = a_{i\cdot} + \lambda a_{j\cdot}$, svi su ostali redići u a i b zajednički, tj. $a_k'. = b_k'.$. Zato je specijalno $\mathrm{Dom}\, a = \mathrm{Dom}\, b$. No, kako su svi redići u a (dakle specijalno i redići $a_{i\cdot}, a_{j\cdot}$) linearni spojevi od spomenutih r redaka iz kojih je uzeto c, znači da će i svi reci od b biti linearni spojevi od istih r redaka; to prema teoremu 10.6 istog poglavlja 11. znači da je svaka submatrica u b stupnja $> r$ singularna, dakle $r(b) \leq r = r(a)$. Idući natrag od b ka a pomoću elementarne transformacije, znači da je također $r(a) \leq r(b)$. Te dvije relacije imaju za posljedicu traženu jednakost $r(a) = r(b)$. Tako je teorem dokazan.

2.4.3.1. Gornje zaključivanje pogotovu kazuje da je $\det a = \det b$.

2.4.4. $ra = ra_T$; $\mathrm{Dom}\, a = \mathrm{Dom}\, a_T$. Kako je zadana matrica a takva da postoji konačni niz matrica $A_0 = a, A_1, A_2, \ldots, A_s = a_T$, za koje svaki član nastaje iz prethodnoga pomoću L-transformacije, to primjenom gornje leme 2.4.3. izlazi $rA_0 = rA_1 = \cdots rA_s$, tj. $rA_0 = rA_s$, tj. $ra = ra_T$.

Iz istog razloga je $\mathrm{Dom}\, a = \mathrm{Dom}\, a_T$. Nadalje je iz istog razloga $\det a = \det a_T$, ako je a kvadratna konačna matrica. Time je dokazana važna jednakost $ra = ra_T$, te jednakost $\mathrm{Dom}\, a = \mathrm{Dom}\, a_T$ u osnovnom teoremu 2.4.0. kao i iskaz (e).

Sada prelazimo na dokaz onih svojstava podmatrice $a_T(T)$ o kojima se govori u teoremu 2.4.0. u iskazima (b), (c) i (f). U tu svrhu dokažimo ovaj teorem o T-matricama.

2.4.5. Teorem o rangu M-podmatrica za T-matrice. *Ako je u proizvoljna T-matrica, a T proizvoljan istaknut njen skup topova iz u, onda je*

(I) $u(T) = Mu$; *pri tom $u(T)$ označuje onu podmatricu od u »što je čine polja od T i polja što ih tuku po dva topa iz T« tj. za koju je*

$$\mathrm{Dom}\, u(T) = D_1 T \times D_2 T;$$

Mu označuje jednu regularnu kvadratnu podmatricu maksimalne duljine uzetu iz u.

(ii) $ru = k(\mathrm{Dom}\, T)$ (= kardinalni broj svih polja u T).

D o k a z. 1. *u (T) je određena kvadratna podmatrica duljine kT, gdje kT kazuje broj topova (polja) iz T.*

Neka je, naime, X, odnosno Y skup svih prvih, odnosno drugih koordinata svih polja iz T; to znači da je X prva, a Y druga projekcija množine T. Za svako $x \in X$ postoji samo jedno $x' \in Y$, i obrnuto, za svako $y \in Y$ postoji samo jedno ^{-}y za koje je $^{-}y \in X$; i to zato jer u T nema raznih polja s istom prvom ili drugom koordinatom. Drugim riječima, pridruživanje $x \to x'$ je određeno *tolikovanje* od X na Y. Dakle, $kX = kY$. S druge strane, pridruživanje $x \to (x, x')$ je jedno tolikovanje od X na T, odnosno na skup polja od T; dakle je $kX = k\,\mathrm{Dom}\, T$. Imamo, dakle, $kX = kY = k\,\mathrm{Dom}\, T$. Najzad, $X \times Y$ je upravo $\mathrm{Dom}\, u(T)$ (domen od $u(T)$). To znači da je $u(T)$ jedna podmatrica tipa $kX \times kY$, tj. tipa $k\,\mathrm{Dom}\, T \times k\,\mathrm{Dom}\, T$, kvadratna podmatrica duljine $k\,\mathrm{Dom}\, T$; to je i trebalo dokazati.

2. *Nadalje je $u(T)$ također jedna T-matrica* (isp. definiciju § 2.2.0). To je očigledno, posebno zbog razloga što ni u u nema topova ispod T. Na taj je način matrica $u(T)$ određena kvadratna T-matrica.

3. *Matrica u (T) je regularna kvadratna matrica.*

Dokaz toga izdvajamo u posebnu tačku: teorema o T-determinantama u § 2.4.6. (vidi niže).

4. *Svaki redak x matrice u koji leži izvan podmatrice u (T) sastoji se od samih nula* (ukoliko izvan $u(T)$ uopće ima koji redak); drugim riječima, *precrtaju li se svi reci od u gdje ima elemenata od $u(T)$, preostatak je nula-matrica* (može biti i „prazno").

Kad bi, naime, u nekom retku x od u ležao koji top, morao bi, po svojstvu (I) T-matricâ, jedan top od x biti u T, dakle i u $u(T)$; time redak x ne bi bio izvan $u(T)$-kontradikcija s definicijom retka x.

5. $u(T) = Mu$.

To znači da treba dokazati dvije tvrdnje: (I) *$u(T)$ je regularna kvadratna matrica.* To je dokazano pod tačkom 3.

(II) *Ako je b kvadratna submatrica od u za koju je $\mathrm{st}\, b > \mathrm{st}\, u(T)$, onda je* $\det b = 0$. Po definiciji, ako je $\mathrm{st}\, b > \mathrm{st}\, u(T)$, onda je $\det b = 0$. No, prema t. 1, $\mathrm{st}\, u(T) = k\,\mathrm{Dom}\, T$; zato relacija $\mathrm{st}\, b > \mathrm{st}\, u(T)$ znači da podmatrica b ima bar jedan redak u retku x matrice u koji je izvan podmatrice $u(T)$; to prema t. 4. znači da je jedan redak u b sastavljen od nula, dakle je $\det b = 0$.

6. *$ru = k\,\mathrm{Dom}\, T$.*

Upravo dokazasmo u 5. da je $u(T) = Mu$; to znači da je $\mathrm{st}\, u(T) = \mathrm{st}\, M(u) = ru$; tj. $\mathrm{st}\, u(T) = ru$. No, prema 1, imamo $\mathrm{st}\, u(T) = k\,\mathrm{Dom}\, T$; dakle je $k\,\mathrm{Dom}\, T = ru$.

Time je teorem 2.4.5. o T-matricama dokazan (isp. ipak t. 3). Preostalo nam je (v. t. 3) da dokažemo još:

2.4.6. Teorem o T-determinantama.[1] *Neka je a kvadratna T-matrica konačnog poretka (n, n); to znači da je $a=0$ ili u a postoji bar jedna tzv. istaknuta potfunkcija T* (isp. § 2.2.0). *Ako je kardinalni broj domena T manji od n,* tj. *$k\,DT<n$, tada je $\det a=0$; i obratno. Ako je »broj $k\,DT$ topova u T« jednak broju n, tada je matrica a regularna* i $\det a=(-1)^I \prod\limits_{x\in DT} T_x$; *pri tom je I suma svih brojeva i, j za koje je $(i, j)\in DT$, tj. za koje skup T topova tuče redak $a_{i.}$ i stupac $a_{.j}$; produkt naznačuje rezultat izmnažanja svih topova u T, tj. svih vrijednosti funkcije T.*

D o k a z. Prvi dio teorema je očigledan. Naime, ako je kardinalni broj $k\,DT$ množine DT manji od broja n redaka matrice a, znači to da bar jedan redak r nema svojeg predstavnika u T; to znači da je r uopće bez topova, sve vrijednosti retka r su 0, pa je, dakle, $\det a=0$. Ako je pak $k\,DT=n$, označimo sa $a_{\nu s_\nu}$ onog topa iz T koji je u retku $a_{\nu.}$, tj. $(\nu, s_\nu)\in \mathrm{Dom}\, T$; to je sasvim određen top matrice a. Promatrajmo najgornji top t_1 u T, tj. top a_{1s_1}; on je jedini u čitavu stupcu $a_{.s_1}$; zato se Laplaceov razvoj za $\det a$ po tom stupcu reducira na produkt $a_{1s_1} f a_{1s_1}$, gdje je $f a_{1s_1}$ algebarski komplement od a_{1s_1} u a; dakle je $f a_{1s_1}=(-1)^{1+s_1}\cdot \det(a\diagdown t_1)$; $a\diagdown t_1$ nastaje iz a brisanjem retka i stupca u kojem je t_1.

No, iz istog razloga je $\det(a\diagdown t_1)=(-1)^{2+s_2}\det[(a\diagdown a_{1s_1}\diagdown a_{2s_2})]$, itd. dok se ne dođe do izraza

$$\det a=(-1)^{1+s_1} a_{1s_1}\cdot(-1)^{2+s_2} a_{2s_2}\cdots=$$

$$=(-1)^{\Sigma(\nu+s_\nu)}\prod_\nu a_{\nu s_\nu}.$$

A to se i želi dokazati, jer je

$$\sum_\nu(\nu+s_\nu)=I, \qquad \prod a_{\nu s_\nu}=\prod_x T_x,\ x\in \mathrm{Dom}\, T \text{(tu je } \nu=1, 2, \ldots, n).$$

Posebno izlazi ovo: ako je $k\,\mathrm{Dom}\, T=n$, onda je $\det a\neq 0$. Prema tome, ako je $\det a=0$, onda je nužno $k\,T<n$, pa je time dokazan i drugi dio prvog dijela teorema. Time je dokazano 2.4.6, dakle i 2.4.5.2; a to je još bilo preostalo pa da teorem 2.4.3.2 bude potpuno dokazan.

2.5. Zadaci o M-podmatricama, T-matricama i trokutnim matricama

1. Da li je podmatrica oblasti (3, 3) koja je smještena u lijevom gornjem uglu slijedeće matrice jedna M-podmatrica ili nije:

$$1)\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&6\\0&0&1&7\end{bmatrix},\quad 2)\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&3\\0&0&1&3\\1&1&1&9\end{bmatrix},\quad 3)\begin{bmatrix}3&0&0&8\\0&4&1&6\\4&0&0&5\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

[1] Taj teorem izdvajamo na posebno mjesto jer je sam po sebi interesantan. Naravno, oznaka a za T-matricu u teoremu 2.4.6. nema veze s istim slovom u teoremu 2.4.0.