POGLAVLJE 12.

CRAMEROV TEOREM. INVERZIJA MATRICA

U ovom poglavlju upoznat ćemo se pobliže s Cramerovim teoremom o rješavanju sistema od n linearnih jednadžbi po n nepoznanica (broj nepoznatih veličina jednak je broju zadanih jednadžbi) i to odmah primijeniti da nađemo inverznu vrijednost a^{-1} regularnih kvadratnih matrica a. Oba su problema od osnovne teoretske i praktične vrijednosti.

1. POSTAVLJANJE PROBLEMA

Promatrajmo n linearnih jednadžbi za n veličina $x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$:

$$(1) \qquad n\left\{\begin{array}{l} \overbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n}^{n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right.$$

Tu se pojavljuju matrice

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix},$$

te matrica $[a, b] = [a_{\cdot 1}, \cdots, a_{\cdot n}, b]$. Matrica a zove se *matrica sistema* (1); $[a, b]$ se zove *proširena matrica sistema* (1).

Sam sistem (1) možemo pisati matrično ovako:

$$(2) \qquad ax = b.$$

Odmah se vidi koliko je matrični način pisanja ekonomičniji i pregledniji.

1.1. *Problem je ovaj: zadano je a, b; treba naći x.* U toj oznaci odmah se postavlja mnogo *općenitiji problem: ako su a, b zadane bilo kakve dvije matrice, pokušajte odrediti matricu x iz veze* (2).

2. CRAMEROV TEOREM

Teorem (G. Cramer, 1750)

2.1. *Iz skupa jednadžbi* **(1)** *za svako* $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *izlazi*

$$\det a \cdot x_\nu = b_1 fa_{1\nu} + b_2 fa_{2\nu} + \cdots + b_n fa_{n\nu} \overset{\text{def}}{=} \det a(\nu); \tag{3}$$

pri tom je $fa_{i\nu} = \det(a \setminus a_{i\nu}) \cdot (-1)^{i+\nu}$, *tj.* $fa_{i\nu}$ *je kofaktor od* $a_{i\nu}$ *u matrici a; nadalje je* $a(\nu)$ *matrica koja iz a nastaje kad joj stupac* $a_{\cdot\nu}$ *zamijenimo stupcem b sistema (1).*

Ako je $\det a \neq 0$, *tada je:*

$$x_\nu = \frac{1}{\det a} \sum_{i=1}^{n} b_i f b_{i\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

jedno jedino rješenje sustava **(1)**.

2.1.1. Primjedba. *Iz sistema* (1) *proizlazi sistem* (1*) *bez obzira na to da li matrica* $[a, b]$ *zavisi ili ne zavisi od veličinâ* x_ν.

2.1.2. Dokaz Cramerova teorema. Pomnožimo n jednadžbi (1) po redu kofaktorima $fa_{11}, fa_{21}, \cdots, fa_{n1}$ prvog stupca matrice a i zbrojimo tako dobivenih n jednadžbi. Izlazi

$$\begin{aligned}(a_{11} fa_{11} + a_{21} fa_{21} + \cdots + a_{\nu 1} fa_{\nu 1} + \cdots) x_1 + (a_{12} fa_{11} + \cdots + \\ + a_{\nu 2} f_{\nu 1} + \cdots) x_2 + \cdots = b_1 fa_{11} + b_2 fa_{21} + \cdots + b_\nu fa_{\nu 1} + \cdots +,\end{aligned} \tag{5_1}$$

tj.
$$\sum_{\mu=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\mu} fa_{\nu_1} \right) x_\mu = \sum_\nu b_\nu fa_{\nu_1}.$$

Prema Laplaceovu pravilu (pogl. 11, § 7.8) koeficijent od x_1 tu je $= \det a$; po istom pravilu koeficijenti ostalih nepoznanica u (5_1) jesu $= 0$; izraz na desnoj strani u (3_1) jest $\det a(1)$, gdje $a(1)$ označuje matricu koja iz matrice a nastaje tako da se stupac $a_{\cdot 1}$ uz x_1 u (1) zamijeni stupcem

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Na taj način jednadžba (3_1) postaje

$$\det a \cdot x_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i fa_{i1} = \det a(1). \tag{6_1}$$

Na sličan način (kako?) — shvatite tu 1 kao varijabilan indeks — dobiva se poput (6_1) ovaj sistem jednadžbi:

$$\det a \cdot x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} b_i fa_{i\nu} = \det a(\nu), \tag{6_ν}$$

gdje je $\nu = 1, 2, \cdots, n$. Time je Cramerov teorem dokazan.

Ako je $\det a \neq 0$, tada je jasno da (3)⇒(4). No, ako pri tom veličine a_{ij}, b_i $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ ne zavise od $x_1, x_2, \cdots x_n$, onda je jasno da su sistemi (3) i (4) međusobno ravnovaljani (ekvivalentni).

Dokažimo još da pri $\det a \neq 0$ veličine (4) zadovoljavaju (1). Stvarno, neka je $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$; uvrstimo (4) u lijevu stranu k-te jednačine u (1); imamo

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j f a_{j\nu}}{\det a} = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} f a_{j\nu}}{\det a} =$$

(prema Laplace-ovu pravilu 11 § 7.8.)

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\delta_{kj} \det a}{\det a} = \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{kj} = b_k .$$

Time je Cramerov stavak 2.1. potpuno dokazan.

2.3. Primjer. Zadane su jednadžbe

$$\begin{aligned} x - 2y \phantom{{}-z} &= 1 \\ 3x + 4y - z &= 2 \\ -2x \phantom{{}+4y} + 3z &= -3. \end{aligned} \tag{5}$$

Matrica sistema glasi:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

pa je $\qquad \det a = 1 \cdot 4 \cdot 3 + (-2 \cdot -2 \cdot -1) - (-2 \cdot 3 \cdot 3) = 26.$

Prema Crameru je

$$26\,x = \det a(x) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \text{(razvijte po trećem retku)} =$$

$$= -3 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 18,$$

tj. $\qquad x = 18/26 = 9/13.$

$$26\,y = \det a(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \text{(razvijte po prvom retku)} = 3 + 7 = 10.$$

$$26\,z = \det a(z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -14.$$

Traženo je rješenje $x = 9/13$, $y = 5/13$, $z = -7/13$.

3. Specijalan slučaj kad desne strane jednadžbi čine istaknut **jedinični niz.**

3.1. Definicija. *Niz je diadski i jedinični* ako mu je jedan član $=1$, a svi drugi $=0$.

3.1.1. Primjer. Zamijenimo desne strane u primjeru 2.3. po redu jediničnim nizovima 1, 0, 0: zatim 0, 1, 0 i najzad, 0, 0, 1. Prvi slučaj daje sistem

$$\begin{aligned} x-2y \quad &=1 \\ 3x+4y-\ z&=0 \\ -2x+ \quad 4z&=0. \end{aligned}$$

Koristeći se podacima iz primjera 2.3. (*determinanta je ista*), imamo

$$26\,x=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(\text{razvijajući po prvom stupcu})=fa_{11}$$

$$(=\text{komplement od } a_{11})=12, \quad \text{tj.} \quad 26\,x=fa_{11}=12.$$

Isto tako:

$$26\,y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=fa_{12}=-7,$$

$$26\,z=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=fa_{13}=8.$$

Označujući sa $x._1$ traženi vektor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \text{ izlazi da je } 26\,x._1=\begin{bmatrix} fa_{11} \\ fa_{12} \\ fa_{13} \end{bmatrix}.$$

Drugim riječima, iz $ax._1=1._1$ izlazi u našem primjeru:

$$\det a\cdot x._1=\begin{bmatrix} fa_{11} \\ fa_{12} \\ fa_{13} \end{bmatrix}=fa_1.,$$

pri tom $fa_1.$ označuje ***redak algebarskih komplemenata što u matrici a*** pripadaju elementima njenog retka $a_{1.}$.

Promatrajmo sada slučaj kad desna strana glasi

$$1._2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

označujući nepoznanice sa $x_{\cdot 2}$, tj. sa x_{12}, x_{22}, x_{32}, imamo po Crameru:

$$\det a \cdot x_{12} = fa_{21} = 6, \quad \det a \cdot x_{22} = fa_{22} = 3, \quad \det a \cdot x_{32} = fa_{23} = -4.$$

Drugim riječima, sistem $ax_{\cdot 2} = 1_{\cdot 2}$ ima rješenje

$$x_{\cdot 2} = \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det a}\begin{bmatrix} fa_{21} \\ fa_{22} \\ fa_{23} \end{bmatrix} \text{ tj. } x_{\cdot 2} = \frac{1}{\det a} fa_{2\cdot}.$$

Analogno iz $ax_{\cdot 3} = 1_{\cdot 3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ izlazi $x_{\cdot 3} = \frac{1}{\det a} fa_{3\cdot} = \frac{1}{\det a}\begin{bmatrix} fa_{31} \\ fa_{32} \\ fa_{33} \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{26}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/13 \\ 1/26 \\ 5/13 \end{bmatrix}.$$

3.2. Na taj smo način za matricu

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

promatrali tri sistema jednadžbi s *jednom te istom matricom a*, a s desnim stranama $1_{\cdot 2}$, tj.

$$1_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1_{\cdot 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1_{\cdot 3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenja smo označavali po redu sa

$$x_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}, \quad x_{\cdot 2} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}, \quad x_{\cdot 3} = \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}.$$

Tako dobijemo i matrice

$$[1_{\cdot 1}, 1_{\cdot 2}, 1_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{26}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -2 \\ -7 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= [x_{\cdot 1}, x_{\cdot 2}, x_{\cdot 3}] = x = \frac{1}{\det a}\begin{bmatrix} fa_{11} & fa_{21} & fa_{31} \\ fa_{12} & fa_{22} & fa_{32} \\ fa_{13} & fa_{23} & fa_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det a} f(a)^T. \tag{7}$$

3.3. Lako se provjeri da za gornje matrice a, x u (6) i (7) vrijedi:

$$ax = \textit{jedinična matrica} = \operatorname{diag}(1). \tag{8}$$

To znači da dobivena matrica $(7)_2$ zadovoljava relaciju (8). Označimo li sa fa matricu čiji su elementi fa_{ik}, tada je $(7)_2 = \frac{1}{\det a}(fa)^T$, gdje a^T označuje transponat od a (zamjena odgovarajućih redaka i stupaca). Drugim riječima *za* naš *primjer* matrice a iz (6) vrijedi:

$$a \cdot \frac{(fa)^T}{\det a} = \operatorname{diag}(1). \tag{9}$$

Odmah ćemo se uvjeriti da *ta formula vrijedi* za ***svaku regularnu kvadratnu konačnu matricu*** i time ćemo doći do jednog *osnovnog matematičkog teorema linearne algebre.* Prirodno je faktor od a u (9) nazvati *inverzna matrica od* a i označiti ga sa a^{-1}.

4.1. Definicija. Za kvadratnu matricu a neka fa označuje matricu koja iz a nastaje tako da joj se *svaka vrijednost* zamijeni *algebarskim komplementom,*

tj. po definiciji

$$(fa)_{ik} = fa_{ik},$$

gdje kao obično fa_{ik} označuje produkt od $(-1)^{i+k}$ i determinante koja se iz matrice a dobije brisanjem retka $a_{i\cdot}$ i stupca $a_{\cdot k}$; tj. $fa_{ik} = (-1)^{i+k} \det(a \setminus a_{ik})$.

Npr.

$$f\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$f\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vidi se da je $(fa)^T = f(a^T)$. Sjetimo se da $(a^T)_{ik} = a_{ki}$.

4.2. Definicija adjunkte (v. pogl. 11, § 14,19) *Adjunkta zadane kvadratne matrice* a zove se *matrica* fa^T. Možemo je označiti sa Aa ili a^Γ. Drugim riječima, ako u matrici a svaku vrijednost zamijenimo pripadnim algebarskim komplementom, dobijemo određenu matricu fa. Transponat te matrice zove se adjunkta Aa matrice a; dakle je

$$(Aa)_{ik} = fa_{ki}$$

(imajte na umu obrnut red indeksa na lijevoj i na desnoj strani!).

$$\text{Npr. } A\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^T = f\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Isto tako, za matricu

$$a=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ prelaz } a_{ik} \to f a_{ik} \text{ daje:}$$

$$a \to fa = \begin{bmatrix} 12 & -7 & 8 \\ 6 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix};$$

transponat od te matrice je Aa, tj.

$$Aa=(fa)^T=\begin{bmatrix} 12 & 6 & -2 \\ -7 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

—→ **4.3.** Teorem. *Za svaku konačnu kvadratnu matricu a vrijedi*

$$a\,(fa)^T=(fa)^T\,a=diag\,(det\;a).$$

Dokaz se sastoji u neposrednoj primjeni Laplaceovog teorema o determinantama. Nađimo, npr., produkt $a\,(fa)^T$; nađimo (ik)-vrijednost toga produkta: $(fa^T)_{ik}=$ (po definiciji množenja) $=$ redak $a_{i.}$ puta stupac $(fa^T)_{.k}$; no *k-stupac* od fa^T je *k-redak* u fa; dakle je:

$$(afa^T)_{ik}=a_{i.}\circ fa_{k.}=(\text{osnovni Laplaceov teorem})=$$

$$=\det a\cdot\delta_i^k,\quad \text{gdje}\quad \delta_i^k=\begin{cases}1 & \text{za}\quad i=k.\\ 0 & \text{za}\quad i\neq k.\end{cases}$$

To upravo znači da je afa^T dijagonalna matrica sa svim elementima na dijagonali jednakim $\det a$.

4.4. Teorem. *Za svaku regularnu konačnu matricu a* vrijedi

$$a\cdot\frac{fa^T}{\det a}=\frac{fa^T}{\det a}\cdot a=diag\;(1).$$

Ovaj teorem izlazi iz relacije u prethodnom teoremu dijeleći je sa $\det a$. Teorem 4.4. osigurava egzistenciju inverzne matrice za *kvadratnu nesingularnu matricu,* tj. za matricu za koju je $\det a\neq 0$.

4.5. Iz $a\cdot Aa=\text{diag}\,(\det a)$ izlazi $\det Aa=(\det a)^{n-1}$. Zaista, navedena jednakost omogućava da zaključimo da veza $\det a=0$ daje vezu $\det Aa=0$. U protivnom bi bilo $\det Aa\neq 0$, tj. postojala bi matrica $(Aa)^{-1}$. Množenjem ishodne jednakosti sa $(Aa)^{-1}$ dobivamo $a=\text{diag}\,(\det a)\cdot(Aa)^{-1}=0$, što je nemoguće jer veza $a=0$ znači da su svi matrični elementi matrice a jednaki 0, pa dakle i $Aa=0$. Ako je pak a nesingularna matrica, tada prema Binet-Cauchyjevu teoremu imamo:

$$\det\,(a\cdot Aa)=\det\,\text{diag}\,(\det a),\qquad \text{tj.}$$

$$\det a\cdot\det Aa=(\det a)^n.$$

Kako je $\det a\neq 0$, to je $\det Aa=(\det a)^{n-1}$.

5. INVERZIJA MEĐU MATRICAMA

5.0. Priprema. Problem inverzije zadane matrice a, tj. pronalaženje matrice x, za koju će biti $ax = xa = \operatorname{diag}(1, 1 \cdots 1)$ od osnovne je *praktične i teoretske vrijednosti*[1]. Problem je u vezi s rješavanjem linearnih sistema kojima je a matrica. *Teoretski* stvar se teoremom potpuno rješava za kvadratne matrice; *praktički* stvar još nije riješena, specijalno za (n, n)-matrice s velikim n. U novije vrijeme učinjen je u tom pogledu znatan napredak primjenom brzometnih računskih strojeva.

Problemom inverzije nekvadratnih matrica bavili su se N. Bjerhammar, M. Stojaković i dr.

⟶ **5.1.** Definicija. *Inverzna ili recipročna matrica zadane kvadratne* (n, n)-*matrice* a je *svaka matrica* x za koju je

$$(1_d) \qquad ax = 1_n \quad \text{i}$$

$$(1_l) \qquad xa = 1_n$$

gdje 1_n označuje *jediničnu* matricu. Inverzna matrica od a označuje se sa a^{-1} ili ^{-}a. Dakle je po definiciji:

$$(2) \qquad aa^{-1} = 1_n \text{ kao i } a^{-1}a = 1_n.$$

Odatle se odmah očitava da je $(a^{-1})^{-1} = a$.

5.1.1. Definicija. Ako je $ab = 1_n$, tada se kaže da je b *desni inverz ili desni reciprok od* a i pišemo $b = a_d^{-1}$, odnosno da je a *lijevi inverz* ili *lijevi reciprok od* b i pišemo $a = b_l^{-1}$.

5.1.2. Odmah ćemo dokazati da za matrice a **konačnog** poretka desni reciprok od a ujedno je i lijevi reciprok od a, pa se podudara s recipročnom matricom a^{-1}; i dualno: lijevi reciprok od a ujedno je i desni reciprok od a i podudara se sa a^{-1}; tada je a^{-1} **jednoznačno** određena matrica (stvar je mnogo zamršenija ako je oblast matrice beskonačna! Isp. § 6.5).

Prema teoremu 4.4. matrica $\dfrac{fa^T}{\det a}$ je *jedno značenje* za a^{-1}; međutim, odmah ćemo dokazati da a^{-1} *nema drugih značenja*.

Stvarno, neka za kvadratnu matricu a vrijedi relacija (1_d), pri čemu je n prirodan broj.

Odatle izlazi da je i x kvadratna matrica i $\operatorname{Dom} x = \operatorname{Dom} a$.

Iz (1_d) izlazi

$$\det(ax) = 1.$$

---

[1] Principijelno, naše je stanovište da se uz *svaki proces* ima promatrati i *obrnut proces*. Zato uz svaku zadanu matricu a treba promatrati i *antimatricu* ^{-}a kao protupreslikavanje onog preslikavanja što ga kao operator definira matrica a. Specijalno, za regularne kvadratne matrice a bilo bi ispravnije definirati a^{-1} pomoću $a^{-1}a = 1_n$, jer se funkcije slažu (komponiraju) pišući ih zdesna nalijevo. No, iz praktičnih razloga, ipak na ovom mjestu definiramo pomoću relacije $a^{-1}a = aa^{-1} = 1_n$, jer su skalarne jednadžbe za vrijednosti od a^{-1} više u skladu s uobičajenim pisanjem linearnih sistema. A prema već dokazanom teoremu 4.4. naslućujemo da je desni inverz od a ujedno i lijevi *inverz od* a.

Primjenom osnovnog Binet-Cauchyjeva teorema (pogl. 11, § 9) imamo dalje

(2) $$\det a \cdot \det x = 1.$$

To znači da je $\det a \neq 0$: matrica a je *regularna*. Zato možemo promatrati i matricu $fa^T/\det a$, s kojom smo se već upoznali. Množeći (1_d) sprijeda matricom $\frac{fa^T}{\det a}$, dobijemo:

$$\frac{fa^T}{\det a}\,ax = \frac{fa^T}{\det a}\cdot 1_n$$

$$\left(\frac{fa^T}{\det a}\cdot a\right)x = \frac{fa^T}{\det a}$$

(po teorému 4.4)

$$1_n \cdot x = \frac{fa^T}{\det a}, \quad \text{tj.}$$

(3) $$ax = 1 \Rightarrow x = \frac{fa^T}{\det a}.$$

Na osnovu toga, teoremom 4.4. osigurano je da iz $ax=1$ proizlazi

$$xa = 1, x = \frac{f(a)^T}{\det a} \quad \text{te}$$

(4) $$a^{-1} = \frac{f(a^T)}{\det a}.$$

Slično se dokazuje da iz (1_l) izlazi (1_d) i (4).

Najzad, iz relacije (2), (3) i (4) proizlazi

$$\det a \cdot \det a^{-1} = 1, \quad \text{tj.}$$

(5) $$\det a^{-1} = (\det a)^{-1} = 1/\det a.$$

Skupljajući gornje rezultate, dobivamo ovaj

⟶ **5.2. Osnovni teorem o inverziji kvadratnih matrica.** *Neka je a kvadratna matrica konačna poretka (n, n); regularnost matrice a, tj. nejednakost* $\det a \neq 0$, *potreban je i dovoljan uslov da postoji inverzna matrica a^{-1} kao rješenje jednadžbi $ax = 1 = xa$. Iz* $\det a \neq 0$ *nužno proizlazi*

$$\mathbf{a^{-1} = \frac{1}{\det a} fa^T}; \quad \text{te}$$

$$\mathbf{\det a^{-1} = (\det a)^{-1}}.$$

Iz $ax = 1_n$ nužno proizlazi $x = a^{-1}$; isto tako iz $ya = 1_n$ nužno izlazi $y = a^{-1}$ (isp. § 5.1.2).

5.3. Inverz produkta. Teorem. *Za kvadratne nesingularne matrice a, b istog konačnog poretka vrijedi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$: inverzija produkta je distributivna, ali* ***obrnutim*** *redom. Analogno za tri i više faktora $a_{k'}$ vrijedi:*

$$(a_1 a_2 \cdot \cdot a_k)^{-1} = a_k^{-1} \cdot \cdot \cdot a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1}.$$

Stvarno, po definiciji imamo $(ab)(ab)^{-1} = 1_n$. Množeći to sprijeda najprije sa a^{-1} pa onda sa b^{-1}, dolazi se do iskazanog teorema za matrice a i b. Induktivno se teorem dokaže za slučaj $3, 4, \cdots$ faktora. Specijalno, kad su svi faktori međusobno jednaki, gornji teorem prelazi u:

5.4. L e m a. $(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$ i općenito $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$, tj.

(1) $$(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k$$

za svaki prirodni broj $k = 1, 2, \cdots$

Pri tom važi ova definicija:

5.5. Cijele potencije regularnih konačnih matrica. D e f i n i c i j a. Za kvadratnu matricu reda n stavljamo $a^0 = 1_n$, $a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a, \cdots$, za prirodni broj k stavljamo $a^{k+1} = a(a^k)$. Ako je a *regularna* kvadratna matrica, onda stavljamo $a^{-k} = (a^{-1})^k$ za svaki prirodni broj k.

5.6. T e o r e m. *Za svaku kvadratnu nesingularnu konačnu matricu a vrijedi*

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l}, \quad (a^k)^l = a^{kl},$$

gdje su k, l proizvoljni cijeli brojevi; specijalno:

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ i } (a^{-2})^{-3} = a^6.$$

Teorem se izvodi iz gornje leme 5.4. Zadovoljimo se da dokažemo ovu relaciju još za slučaj $k = -2$, $l = -3$, jer se analogno obrađuje opći slučaj $k < 0$, $l < 0$. No, $(a^{-2})^{-3} =$ (po definiciji) $= [(a^{-1})^2]^{-3} =$ (po obrascu (1)) $= \{[(a^2)^{-1}]^{-1}\}^3 = \{a^2\}^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 =$ (zbog asocijacije) $= a^6 = a^{2\cdot 3} = a^{-2\cdot -3}$.

5.7. Operator inverzije prema T-operatoru i $\star$-operatoru.

T e o r e m. $(a^{-1})^\star = (a^\star)^{-1}$; specijalno $(a^{-1})^T = (a^T)^{-1}$; pri tom $x \to x^T$ znači transponiranje matrice x; a $x^\star$ znači $\overline{x^T}$ (uzeti konjugiranu ili spregnutu matricu od x^T).

Stvarno,

$$(a^{-1})^\star = \left(\frac{1}{\det a} Aa\right)^\star = (Aa)^\star \left(\frac{1}{\det a}\right)^\star = Aa^\star \frac{1}{\det a^\star}$$

(to se lako vidi); dalje je to

$$= \frac{1}{\det a^\star} Aa^\star = (a^\star)^{-1}.$$

6. DIJELJENJE MATRICA. LINEARNA MATRIČNA JEDNADŽBA

6.1. Matrična jednadžba $ax = b$. Naučili smo rješavati matrične jednadžbe $ax = 1_n$ (isp. § 5.2); rješenje je $x = a^{-1} = fa^T/\det a$ (ukoliko je $\det a \neq 0$). Na sličan se način rješava matrična jednadžba $ax = b$ ako je $\det a \neq 0$. Množenjem sa a^{-1} sprijeda izlazi

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b \text{ ili}$$

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b, \text{ tj.}$$

$$x = a^{-1}b \cdot \text{ jer je } a^{-1}a = I \text{ po definiciji 5.1.}$$

6.2. Matrična jednadžba $xa=b$. Isto tako iz $xa=b$ izlazi

$$x=ba^{-1}.$$

U općem je slučaju $a^{-1}b \neq ba^{-1}$. Matrica $a^{-1}b, ba^{-1}$ mogu se zvati *lijevi i desni kvocijent matrica* b i a. Na taj je način jasno da imamo *dva obrata množenja*: *lijevo dijeljenje i desno dijeljenje.*

6.3. Cramerov teorem i inverzija matrica. Znamo da se sistem linearnih jednadžbi može pisati i matrično $ax=b$ (a je matrica sistema, x je stupac od nepoznanica, b je stupac desnih strana). Tad je $x=a^{-1}b$. Drugim riječima, poznavanje inverza a^{-1} matrice a omogućuje nam da *neposredno riješimo svaki linearni sistem s tom matricom a*: dovoljno je a^{-1} *pomnožiti stupcem desnih strana jednadžbi.* U tome je *velika praktična i teorijska važnost invertiranja* matrica.

6.4. Što je s matričnom jednadžbom $ax=b$ ako je a neregularna kvadratna ili nekvadratna matrica? Ubuduće ćemo obrađivati neke slučajeve takvih jednadžbi! Imajmo uvijek na umu jednadžbe oblika $ax=b$ i pratimo kako se razvija naše znanje o njima!

6.5. Zadaci o inverziji matrica. 1. Nađi a^T, fa, fa^T, a^{-1} za matricu a

$$1)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix};\quad 3)\begin{bmatrix}3&4&5\\5&3&0\end{bmatrix};$$

$$4)\begin{bmatrix}3&5&4\\2&1&2\\0&3&5\end{bmatrix};\quad 5)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&x&u\\0&v&y\end{bmatrix};\quad 6)\begin{bmatrix}x&0&u\\0&1&0\\v&0&y\end{bmatrix};$$

$$7)\begin{bmatrix}x&u&0\\v&y&0\\0&0&1\end{bmatrix};\quad 8)\begin{bmatrix}3&-5&4\\2&1&5\\8&-9&13\end{bmatrix};\quad 9)\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

Za koje je slučajeve u navedenim primjerima a^{-1} određeno?

1_d. Nađi desni inverz matrice a iz prethodnog zadatka; 1_l. Nađi lijevi inverz matrice a iz zadatka 1.

2. Odredi x i y iz $ax=b$, $ya=b$ ako a i b znače ove matrice:

$$1)\begin{bmatrix}3&5\\4&2\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix};\quad 2)\begin{bmatrix}4&1&2\\5&3&5\\6&1&7\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2&2&2\\3&3&2\\4&4&4\end{bmatrix};$$

$$3)\ a=\begin{bmatrix}5&7&2\\4&7&3\\3&2&4\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix},\cdots$$

3. Ako se zna rješenje x iz $ax=b$, riješi $by=a$.

4. Za matrice a i b iz zadatka 2 nađi rješenje jednadžbe $a^{-1}xa=b'$ ukoliko rješenje postoji.

5. Može li postojati obratna matrica m^{-1} matrice m za koju zaključak $mx=my \Rightarrow x=y$ nije ispravan? Npr. $m=S$, gdje je $S_{i\,i-1}=1$ $(i=2,3,\cdots)$, a inače $S_{ik}=0$ te $x=(0,0,0,\cdots)^T, y=[1,0,\cdots]^T$.

6. Ako matrica $I+x$ ima svoju recipročnu vrijednost pa ako je

$(I+x)^{-1}=I+y$, tada je $x+y+xy=[0]$. Dokaži!

7. Ako je produkt aa^T regularna matrica, tada je $a^T(aa^T)^{-1}$ jedan desni inverz a_d^{-1} od a; dokaži to. Nađi bar jedan lijevi inverz od a. Pri tom a može biti i nekvadratna, odnosno singularna matrica. Navedi primjere.

8. Promatraj ovu matricu x:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{2}{21}\begin{bmatrix} 17 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{116}\begin{bmatrix} 79 & 8 & 49 & -17 & 13 \\ 8 & 108 & -20 & -12 & 16 \\ 49 & -20 & 37 & -1 & 11 \\ -17 & -12 & -1 & 69 & 53 \\ 13 & 16 & 11 & 53 & 55 \end{bmatrix};$$

uvjeri se da vrijedi $x^2=x$ i uopće $x^n=x$ za svaki prirodni broj n!

Pokušaj naći još koje rješenje jednadžbe $x^2=x$ (npr. da bude $\mathrm{Dom}\,x=(4,4)$). Rješenja jednadžbe $x^2=x$ zovu se *idempotentne matrice.*

9. 1) Neka je matrica a takva da je a^Ta regularno; stavimo

$$a_l^{(0)}=a(a^Ta)^{-1}a^T;$$

uvjeri se da je $a_l^{(0)}$ kvadratna matrica i da zadovoljava $x^2=x$; kao i $xa=a$; promatraj slučaj

$$a=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Za $x=a_l^{(0)}$ nađi $x(x-I)$, $(x-I)(x+I)$, $(x-I)^n$ za $n=2,3,\cdots$

3) Ako je aa^T regularna matrica, nađi: $x=a_d^{(0)}=a^T(aa^T)^{-1}a$, x^2, $(x-I)x$, x^n.

Bjerhammar naziva matrice $a_l^{(0)}$, $a_d^{(0)}$ *izvanrednim jediničnim matricama.*

Literatura: Anđelić [3], Blanuša [1], Denis-Papin, Kaufmann [1], Gantmaher [1], Križanič [1], Kurepa Svetozar [1], Lichnerowicz [1], Mac Duffee [1], Mal'cev [1], Zurmuhl [1].

POGLAVLJE 13.

SISTEM HOMOGENIH LINEARNIH JEDNADŽBI. VEKTORSKI PROSTORI. LINEARNA ZAVISNOST I LINEARNA NEZAVISNOST

0. POSTAVLJANJE PROBLEMA. UVODNA RAZMATRANJA

Dosad smo riješili jednadžbu $ax=b$ svaki put kad je a kvadratna konačna i regularna matrica, dakle $\det a \neq 0$ (ovaj uvjet regularnosti za slučaj da je a broj postaje $a \neq 0$). Jednadžba ima rješenje $x=a^{-1}b$. Sad ćemo uslov regularnosti *zabaciti*, ali ćemo staviti *ograničenja na matricu b* i pretpostaviti da je ona *nula-vektor* $\vec{0}$.

0.1. Prema tome, problem glasi:

Riješiti jednadžbu

(1) $$a\vec{x}=\vec{0};$$

ili eksplicitno: *naći niz* $x=(x_{n'})_{n'}$ od n članova $x_{n'}$ tako da bude *zadovoljen sistem* S_0 *ovih* k ***homogenih*** *jednadžbi:*[1]:

(S_0)
$$\underbrace{k\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu + \cdots = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2\nu}x_\nu + \cdots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i\nu}x_\nu + \cdots = 0, \end{cases} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}_{n}$$

odnosno

(S_0) $$\sum_\nu a_{i\nu}x_\nu = 0 \qquad (i=1,2,\cdots k);$$

ili pomoću skalarnog produkta:

(1) $$a_{i\cdot} \circ \vec{x} = \vec{0}.$$

Pri tom su k i n prirodni brojevi; i, odnosno ν prolazi intervalom od prvih k, odnosno n prirodnih brojeva.

[1] Indeks 0 u S_0 podsjeća nas da imamo posla s homogenim sistemom jednadžbi (desne su strane jednake nuli).