2.28. Neka je (x_n) niz realnih ili kompleksnih brojeva.

1° Dokazati da konvergencija sva tri podniza

(1) $$(x_{2n}),\ (x_{2n-1}),\ (x_{3n})$$

povlači konvergenciju niza.

2° Da li iz konvergencije dva od nizova (1) sleduje konvergencije niza (x_n)?

3° Da li konvergencija svih nizova $(x_{sn})_{n\in\mathbf{N}}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ povlači konvergenciju niza (x_n)?

Rešenje. 1° Ako su sva tri niza (1) konvergentna, tada, prvo, podnizovi

(2) $$(x_{6n}) \quad \text{i} \quad (x_{3n})$$

niza (x_{3n}) $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiraju ka istoj granici, pa zatim, kako su nizovi (2) redom podnizovi nizova (x_{2n}) i (x_{2n-1}), poslednja dva niza imaju istu graničnu vrednost. To, međutim, znači da je niz (x_n) konvergentan.

2° Odgovor je negativan za svaku kombinaciju po dva od nizova (1): za $x_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, prva dva niza (1) konvergiraju, a treći divergira; ako je $x_n = 0$ ili $x_n = 1$ prema tome da li je broj n prost ili složen, niz (x_n) divergira iako su prvi i treći od nizova (1) konvergentni; najzad, ako je $x_n = 0$ za $n = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ i $x_n = 1$ za sve ostale vrednosti n, tada drugi i treći od nizova (1) konvergiraju, a niz (x_n) divergira.

3° Odgovor je negativan, što dokazuje drugi od primera navedenih pod 2°: u ovom slučaju svi nizovi $(x_{sn})_{n\in\mathbf{N}}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ konvergiraju ka broju 1, a niz (x_n) divergira.

2.29. Dokazati Stolzovu teoremu:

Ako je y_n strogo rastući niz i pri tome $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tada

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji, kao konačan broj ili kao pozitivna ili negativna beskonačnost.

Dokaz. Neka je

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

konačan broj i neka je $\varepsilon\ (> 0)$ proizvoljno izabrano. Tada postoji prirodan broj n_0 takav da je, za svaki prirodan broj k veći od n_0, $y_k > 0$ i

$$L - \varepsilon < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < L + \varepsilon,$$

tj.

$$(L-\varepsilon)(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < (L+\varepsilon)(y_k - y_{k-1}) \quad (y_k - y_{k-1} > 0).$$

Stavljajući u poslednjoj dvostrukoj nejednakosti redom $k = n_0 + 1, \ldots, n\ (n > n_0)$ i sabirajući sve te nejednakosti, dobijamo

$$(L-\varepsilon)(y_n - y_{n_0}) < x_n - x_{n_0} < (L+\varepsilon)(y_n - y_{n_0}) \qquad (n > n_0),$$

ili kako je $y_n > 0$,

$$\frac{x_{n_0}}{y_n} + (L-\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n_0}}{y_n} + (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) \qquad (n > n_0).$$

Puštajući ovde da $n \to +\infty$, dobija se

$$L - \varepsilon \le \varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le L + \varepsilon;$$

puštajući potom da $\varepsilon \to +0$, dolazi se do zaključka da niz $\frac{x_n}{y_n}$ konvergira i da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Na sličan način ustanovljava se da tvrđenje važi i u slučajevima kada je $L = +\infty$ ili $L = -\infty$.

Primedba. Istim metodom može se dokazati i sledeće opštije tvrđenje:

Ako je y_n strogo rastući niz i pri tome $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tada je, za bilo koji realan niz x_n,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \le \varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

2.30. Ako je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ $(n \ge 1)$, tada je $a_n = n^2$. Dokazati ovo metodom matematičke indukcije.

2.31. Dokazati da Fibonacciev niz

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad (n \text{ prirodan broj ili nula})$$

zadovoljava sledeće jednakosti:

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1 \qquad (n \ge 0),$$

2.54. Dokazati da niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

konvergira. (Njegov limes γ poznat je pod imenom Eulerove konstante i ima vrednost $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$).

***Dokaz* 1.** Uporedno sa datim nizom posmatraćemo niz

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Kako je

$$a_n - b_n = \log \frac{n+1}{n} > 0, \text{ tj. } a_n > b_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to +\infty} \log \frac{n+1}{n} = 0,$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \text{ tj. } a_n \downarrow,$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+2) + \log(n+1) = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 - \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right] > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \text{ tj. } b_n \uparrow,$$

nizovi a_n i b_n konvergiraju ka zajedničkom limesu $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, pri čemu je

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \gamma < a_n < \cdots < a_2 < a_1 \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Pomoću ovih nejednakosti mogle bi se izračunavati približne vrednosti Eulerove konstante γ, uz procenu greške, ali takav postupak bio bi prilično zametan. Iz njih, međutim, odmah izlazi da $\gamma \in (0, 1)$, a takođe i preciznija procena $\frac{3}{2} - \log 3 < \gamma < \frac{3}{2} - \log 2$.

***Dokaz* 2.** Na osnovu jednakosti $a_n - a_{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$, i nejednakosti (videti 2.53)

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

zaključujemo da je $a_n > a_{n+1}$, tj. dati niz je opadajući.

Iz desne nejednakosti u (1) redom izlazi

$$\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad \log \prod_{=1}^{n} \frac{k+1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

tj.

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < a_n.$$

Na osnovu poslednje nejednakosti zaključujemo da je $a_n > 0$.

Dakle, dati niz opada i ograničen je, što znači da je konvergentan.

2.55. Ako je

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}},$$

odrediti $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

2.74. 1° Dokazati teoremu:

Neka je $b_{k,n} > 0$ $(k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Ako

$$\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} \to 1 \quad (n \to +\infty)$$

uniformno u odnosu na k, tj. ako za svako $\varepsilon\ (> 0)$ postoji takvo m da $n > m$ povlači

$$\left| \frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

tada je

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani ima konačnu vrednost.

2° Naći granične vrednosti sledećih nizova:

α) $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[p]{1 + \frac{k^{q-1}}{n^q}} - 1 \right) \qquad (p \neq 0, q > 0);$$

β) $$b_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k-1}{n^2} a \quad (a \neq 0);$$

γ) $$c_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) \quad (a > 0);$$

δ) $$d_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

Rešenje. 1° Ako stavimo

$$\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} = 1 + \varepsilon_{k,n} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),$$

imamo

(1) $$\sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}.$$

Iz konačnosti limesa niza $\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}$ izlazi da postoji takvo konačno $M > 0$ da je

(2) $$\sum_{k=1}^{n} b_{k,n} \leq M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako je $a_1 > b_1 > 0$, dokazati da je

(2) $$a_n > b_n > 0,$$

(3) $$a_{n+1} < a_n, \quad b_{n+1} > b_n,$$

(4) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$$

Dokaz. Dokazaćemo samo jednakost (4). Prema (3), niz (a_n) opada, a prema (2) je ograničen. Stoga je niz (a_n) konvergentan.

Na osnovu (3), niz (b_n) raste. Kako je, prema (2), $a_1 > a_n > b_n$, niz (b_n) je ograničen, pa je i konvergentan i važi $\lim_{n\to+\infty} b_n > 0$.

Ako stavimo $\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = l_2$, iz (1) dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n\right), \quad \text{tj.} \quad l_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

odakle je

$$l_1 = l_2 = l, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = l > 0.$$

Slično dobijamo ako ovaj postupak primenimo na jednakost kojom je definisan niz (b_n). Sada ćemo odrediti l. Iz (1) izlazi

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n,$$

odakle je

$$a_k b_k = a_1 b_1.$$

Kako je

$$\lim_{k\to+\infty} (a_k b_k) = \lim_{k\to+\infty} a_k \cdot \lim_{k\to+\infty} b_k = l^2 \quad \text{i} \quad \lim_{k\to+\infty} (a_k b_k) = a_1 b_1,$$

dobijamo $l = \sqrt{a_1 b_1}$.

Primedba. Nizovi formirani pomoću formula (1) nazivaju se aritmetičko-harmonijske ili harmonijsko-aritmetičke sredine. O ovome videti:

D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Sredine*, Matematička biblioteka, sv. 40, Beograd 1969, str. 52–55.

2.78. Dati su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pozitivnih brojeva, definisani sa

$$a_{n+1} = a_n + 2\,b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 2.$$

Dokazati da su članovi niza $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, gde je $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, naizmenično veći i manji od $\sqrt{2}$, i da je

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|c_n - \sqrt{2}|.$$

Naći $\lim_{n\to+\infty} c_n$.

Rešenje. Iz datih relacija sleduje

(1) $$c_{n+1} = \frac{a_n + 2\,b_n}{a_n + b_n} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}.$$

Kako je $a_n > 0$ i $b_n > 0$ $(n\in\mathbf{N})$, zaključujemo da je i $c_n > 0$ $(n\in\mathbf{N})$. Na osnovu (1), dobijamo

(2) $$c_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)\,c_n + \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)}{c_n + 1}$$

$$= -\frac{\sqrt{2} - 1}{c_n + 1}\,(c_n - \sqrt{2}).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano. U saglasnosti sa pretpostavkom, postoji m takvo da

$$|\varepsilon_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (n > m;\ k = 1, \ldots, n).$$

Dalje imamo, s obzirom na (2), za $n > m$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n}\, b_{k,n} \right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} \leq \varepsilon .$$

To znači da $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n}\, b_{k,n} = 0$. Iz (1) onda izlazi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} .$$

Primedba 1. Uslov $b_{k,n} > 0\,(k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ može se zameniti uslovom da $b_{k,n}$ ne menja znak za dovoljno veliko n.

Primedba 2. Količnik $a_{k,n}/b_{k,n}$ svakako konvergira ka 1 uniformno u odnosu na k ako je

$$a_{k,n} = f(c_{k,n}),\ b_{k,n} = g(c_{k,n}) \quad (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

gde $c_{k,n}$ uniformno u odnosu na k teži ka nuli kad $n \to +\infty$.

2 α) Za $k = 1, \ldots, n$ je $c_{k,n} = \dfrac{k^{q-1}}{n^q} \leq \max\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^q}\right)$, odakle izlazi da $c_{k,n}$ teži ka nuli kad $n \to +\infty$ uniformno u odnosu na k. Uzimajući u obzir dokazano tvrđenje pod 1° i primedbu 2 i uočavajući da

$$\frac{\sqrt[p]{1+x} - 1}{\frac{1}{p}\, x} \to 1 \qquad (x \to 0),$$

dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{q-1}}{n^q} = \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{q-1}}{n^q - (n-1)^q}$$

$$= \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^q} = \frac{1}{p\,q} .$$

Ovde je primenjena Stolzova teorema. Može se postupiti i na sledeći način (definicija određenog integrala u Riemannovom smislu za $q \geq 1$ i dopunski rezultat za $0 < q < 1$ (videti 2.49)):

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{q-1}}{n^q} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{q-1} \frac{1}{n} = \int_0^1 t^{q-1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{q} .$$

β) Kako je

$$\left| \frac{2k-1}{n^2}\, a \right| \leq \frac{2n-1}{n^2}\, |a| \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

istim rasuđivanjem kao napred dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2}\, a = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^2}\, n^2 = a .$$

Kako je $c_n > 0$, iz (2) izlazi

$$c_n > \sqrt{2} \Rightarrow c_{n+1} < \sqrt{2}, \qquad c_n < \sqrt{2} \Rightarrow c_{n+1} > \sqrt{2}.$$

Kako je $c_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, zaključujemo da je

$$c_{2n} < \sqrt{2}, \qquad c_{2n-1} > \sqrt{2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Iz $c_n > 0 \, (n \in \mathbf{N})$ sleduje

$$0 < \frac{\sqrt{2}-1}{c_n+1} < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}.$$

Na osnovu ovoga, iz (2) izlazi

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} |c_n - \sqrt{2}|,$$

i dalje

$$|c_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^{n-1}} |c_1 - \sqrt{2}| \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Odavde,

$$\lim_{n \to +\infty} |c_n - \sqrt{2}| = 0, \quad \text{tj.} \lim_{n \to +\infty} c_n = \sqrt{2}.$$

2.85. Dokazati da niz

$$x_0, \quad x_1 = \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}, \ldots, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}, \ldots \quad (0 < x_0 < b; \quad a > 0)$$

strogo raste i da je ograničen. Odrediti $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Rešenje. Ispitajmo da li je

$$(1) \qquad x_0 < x_1, \quad \text{tj.} \quad x_0 < \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}.$$

Pretpostavimo da ovo nije tačno već da je $x_0 \geq \sqrt{\dfrac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}$. Posle kvadriranja dobijamo

$$(a+1)\, x_0^2 \geq a\, b^2 + x_0^2 \Leftrightarrow a\, x_0^2 \geq a\, b^2 \Leftrightarrow x_0^2 \geq b^2 \quad (\text{jer je } a > 0).$$

Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $x_0 < b$, pa je zaista $x_0 < x_1$.

Pretpostavimo sada da je $x_{n-1} < x_n$ za neko n. Tada je

$$\frac{a\, b^2 + x_{n-1}^2}{a+1} < \frac{a\, b^2 + x_n^2}{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a\, b^2 + x_{n-1}^2}{a+1}} < \sqrt{\frac{a\, b^2 + x_n^2}{a+1}} \Leftrightarrow x_n < x_{n+1}.$$

Prema tome, metodom indukcije dokazali smo da niz $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ raste.

Dokazaćemo sada nejednakost $x_n < b$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Za $n = 1$ ovo je tačno jer je

$$\frac{a\, b^2 + x_0^2}{a+1} < b^2 \Leftrightarrow x_0^2 < b^2 \qquad (\text{uslov zadatka}).$$

Ako za neko n važi $x_n < b$, tada je takođe

$$\frac{a\, b^2 + x_n^2}{a+1} < \frac{a\, b^2 + b^2}{a+1} = b^2 \Leftrightarrow x_{n+1} < b.$$

Ovim smo završili induktivni dokaz da je $x_n < b$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dati niz raste i ograničen je s gornje strane. Prema tome, niz ima graničnu vrednost.

Ako stavimo $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = t$, tada iz $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a\, b^2 + x_n^2}{a+1}}$ sleduje $t = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b$.

2.86. Dokazati da je niz $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2\, a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergentan.

2.87. Dokazati da je niz (u_n), gde je

$$u_{n+1} = \frac{6\,(1 + u_n)}{7 + u_n}, \quad u_1 = c > 0,$$

ograničen sa gornje strane. Odrediti graničnu vrednost ovog niza.

2.88. Ispitati konvergenciju niza (a_n) čiji je opšti član

$$(1) \qquad a_n = \left(1 - \frac{1^\alpha}{n^\alpha}\right)\left(1 - \frac{2^\alpha}{n^\alpha}\right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

gde je α realan broj.

Rešenje. Ako je $\alpha = 0$, tada $a_n = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$ i stoga $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Ako je $\alpha > 0$, imamo

$$0 < a_n \leq 1 - \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

i odatle je ponovo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

U slučaju kad $\alpha < 0$, stavljajući $\alpha = -\beta$, dobijamo

$$(2) \qquad a_n = (-1)^{n-1}\,(n^\beta - 1)\left(\left(\frac{n}{2}\right)^\beta - 1\right) \cdots \left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^\beta - 1\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Za $\beta = 1$, prema (2), imamo $a_n = (-1)^{n-1}$, tako da niz (1) za $\alpha = -1$ oscilira između konačnih granica.