2° Da bi realan broj L bio gornji limes niza (a_n), potrebno je i dovoljno da, za svako $\varepsilon > 0$, nejednakost $a_n < L + \varepsilon$ bude ispunjena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n > L - \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n. Da bi realan broj l bio donji limes istog niza, potrebno je i dovoljno da, za svako $\varepsilon > 0$, nejednakost $a_n > l - \varepsilon$ bude ispunjena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n < l + \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n.

3° Neka su (a_n) i (b_n) realni nizovi. Ako je za n dovoljno veliko $a_n \leq b_n$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} b_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Dokaz. 1° Neka je za n dovoljno veliko $a_n \leq A \in \mathbf{R}$. Tada je niz ograničen sa gornje strane i stoga je $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$. Ako bi neka tačka nagomilavanja niza bila veća od A, bilo bi $a_n > A$ za proizvoljno velike vrednosti n, u suprotnosti sa pretpostavkom. Stoga, ako je $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{R}$, mora biti $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \leq A$. Poslednja nejednakost očigledno je tačna i kada je $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Neka je $a_n \geq a$ za proizvoljno velike vrednosti n. Ako je niz i ograničen sa gornje strane, tj. ako postoji realan broj $b \geq a$ takav da je $a_n \leq b \ (n \in \mathbf{N})$, tada očigledno postoji podniz (a_{p_n}) niza (a_n) čiji se svi članovi nalaze u intervalu $[a, b]$. Niz (a_{p_n}) onda, prema Bolzano-Weierstrassovom stavu, ima tačku nagomilavanja $c \in [a, b]$. Dakle, niz (a_n) ima tada tačku nagomilavanja $c \geq a$ i stoga je u tom slučaju $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \geq c$. Ako niz (a_n) nije ograničen sa gornje strane, imamo

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n = +\infty \geq a.$$

Na sličan način dokazuju se poslednja dva tvrđenja pod 1°.

2° Neka broj L u odnosu na niz (a_n) ispunjava navedene uslove. Tada je, prema 1°, za svako $\varepsilon > 0$

$$L - \varepsilon \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \leq L + \varepsilon;$$

puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Neka je $L = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Tada je L tačka nagomilavanja niza (a_n), pa mora, za svako $\varepsilon>0$, biti $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, tj. $a_n > L - \varepsilon$ sa proizvoljno velikim vrednostima n. Ako, sa nekim fiksiranim $\varepsilon > 0$, ne bi bilo $a_n < L + \varepsilon$ za n dovoljno veliko, imalo bi se, sa istim ε, $a_n \geq L + \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n i stoga, prema 1°, $L = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \geq L + \varepsilon > L$. Dobijena protivrečenost dokazuje da mora za svako $\varepsilon > 0$ biti $a_n < L + \varepsilon$ ukoliko je n dovoljno veliko.

Tvrđenje koje se odnosi na broj l analogno se dokazuje.

3° Pretpostavimo da je za n dovoljno veliko $a_n \leq b_n$. Neka je

$$a = \varliminf_{n\to+\infty} a_n > \varliminf_{n\to+\infty} b_n = b,$$

i neka je $a > c > b$. Onda je za n dovoljno veliko $a_n > c$. Zaista, ako je $a \in \mathbf{R}$, ovo izlazi iz drugog tvrđenja pod 2°, a u slučaju kad je $a = +\infty$, iz činjenice da je tada $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Prema drugom tvrđenju pod 2°, ukoliko je $b \in \mathbf{R}$, i na osnovu činjenice da $b = -\infty$ znači da je niz (a_n) sa donje strane neograničen, za proizvoljno velike vrednosti n je $b_n < c$. Dakle, za proizvoljno veliko n je tada $a_n > b_n$. Dobijena protivrečnost sa polaznom pretpostavkom dokazuje da ta pretpostavka povlači nejednakost $a \leq b$.

Drugo tvrđenje analogno se dokazuje.

2.20. 1° Dokazati da za bilo koja dva niza a_n i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ važe nejednakosti

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \le \varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n)$$
$$\le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

uz isključenje onih nejednakosti koje sadrže izraze $+\infty - \infty$ ili $-\infty + \infty$.

2° Ako je $a_n \ge 0$ i $b_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dokazati da važe i nejednakosti

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \varliminf_{n\to+\infty} b_n \le \varliminf_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

uz isključenje onih koje sadrže proizvode $0 \cdot (+\infty)$ ili $(+\infty) \cdot 0$.

Ako $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ postoji kao konačan broj, dokazati da je

$$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \varliminf_{n\to+\infty} b_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Ako je uz to $a > 0$ i $b_n \ge 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dokazati da je takođe

$$\varliminf_{n\to+\infty} (a_n b_n) = a \varliminf_{n\to+\infty} b_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) = a \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Rešenje. Neka je

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = l_1, \quad \varliminf_{n\to+\infty} b_n = l_2, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = L_1, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} b_n = L_2.$$

Od nejednakosti u 1°, dokazaćemo samo

$$l_1 + L_2 \le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le L_1 + L_2, \tag{1}$$

a od onih u 2° samo

$$l_1 L_2 \le \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le L_1 L_2 \qquad (a_n, b_n \ge 0 \ (n \in \mathbb{N})). \tag{2}$$

Dokazi ostalih nejednakosti su analogni.

1° Neka su L_1 i L_2 realni brojevi. Ako je tada $\varepsilon > 0$ unapred dato, za n dovoljno veliko je, prema prethodnom problemu pod 2°,

$$a_n < L_1 + \varepsilon, \quad b_n < L_2 + \varepsilon \tag{3}$$

i odatle

$$a_n + b_n < L_1 + L_2 + 2\varepsilon$$

za dovoljno veliko n. Odavde je, prema prethodnom problemu pod 1°,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \le L_1 + L_2 + 2\varepsilon.$$

Puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se desna nejednakost (1). Ako je jedan od limesa L_1 i L_2 jednak $+\infty$, a drugi $> -\infty$, desna nejednakost (1) očigledno važi. Neka je, dalje, $L_1 = -\infty$ i $L_2 < +\infty$. Tada postoji $a \in \mathbb{R}$ takvo da je

$$b_n \le a \qquad \text{za svako } n. \tag{4}$$

Ako je $m \in \mathbb{R}$ proizvoljno izabrano, biće

$$a_n \le m - a, \qquad \text{za dovoljno veliko } n. \tag{5}$$

Prema (4) i (5),

$$a_n + b_n \le m, \qquad \text{za dovoljno veliko } n.$$

To znači da je u ovom slučaju $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = -\infty$, tj.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) = -\infty = L_1 + L_2.$$

Neka je $l_1, L_2 \in \mathbf{R}$. Tada je, sa unapred izabranim $\varepsilon > 0$,

(6) $$a_n > l_1 - \varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko,}$$

(7) $$b_n > L_2 - \varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko,}$$

i odatle

$$a_n + b_n > l_1 + L_2 - 2\,\varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Odavde, prema prethodnom problemu pod 1°, izlazi

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \geq l_1 + L_2 - 2\,\varepsilon.$$

Puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \geq l_1 + L_2$. Ako je jedan od limesa l_1 i L_2 jednak $-\infty$, a drugi $< +\infty$, leva nejednakost u (1) očigledno važi. Ako je $l_1 = +\infty$ i $L_2 > -\infty$ postoji $a \in \mathbf{R}$ takvo da je

(8) $$b_n > a, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko,}$$

i sa unapred datim $M \in \mathbf{R}$ je

(9) $$a_n > M - a, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko.}$$

Prema (8) i (9),

(10) $$a_n + b_n > M, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Ako je $l_1 > -\infty$ i $L_2 = +\infty$, slično se ustanovljava da takođe važi (10), sa proizvoljnim unapred datim realnim brojem M. U oba slučaja, niz $(a_n + b_n)$ je, dakle, sa gornje strane neograničen i stoga

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) = +\infty = l_1 + L_2.$$

2° Pretpostavimo da je $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Neka su, prvo, L_1 i L_2 realni brojevi. Tada za n dovoljno veliko ponovo važe nejednakosti (3). Množenjem se ustanovljava da je za dovoljno veliko n

$$a_n\, b_n < (L_1 + \varepsilon)\,(L_2 + \varepsilon);$$

odatle,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n\, b_n) \leq (L_1 + \varepsilon)\,(L_2 + \varepsilon)$$

i dalje $(\varepsilon \to +0)$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n\, b_n) \leq L_1 L_2.$$

Ako je jedan od limesa L_1 i L_2 jednak $+\infty$, a drugi > 0, desna nejednakost (2) očigledno ponovo važi.

Neka je $0 < l_1 < +\infty$, $0 < L_2 < +\infty$ i neka je $0 < \varepsilon \leq \min\{l_1, L_2\}$.

Tada su ponovo ispunjeni uslovi (6) i (7), pri čemu je $l_1 - \varepsilon \geq 0$, $L_2 - \varepsilon \geq 0$. Množenjem se ustanovljava da je

$$a_n\, b_n \geq (l_1 - \varepsilon)\,(L_2 - \varepsilon), \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko,}$$

i odatle, prvo, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n\, b_n) \geq (l_1 - \varepsilon)\,(L_2 - \varepsilon)$, pa zatim $(\varepsilon \to 0+)$ $\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n\, b_n) \geq l_1 L_2$. Ako je jedan od limesa l_1 i L_2 nula, a drugi $< +\infty$, leva nejednakost u (2) očigledno važi. Neka je $l_1 = +\infty$ i $L_2 > 0$. Tada postoji $a \in (0, +\infty)$ takvo da je

(11) $$b_n > a, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko,}$$

i sa unapred datim $M \in (0, +\infty)$ je

(12) $$a_n > \frac{M}{a}, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko.}$$

Prema (11) i (12) je

(13) $$a_n b_n > M, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Ako je $l_1 > 0$ i $L_2 = +\infty$, na sličan način ustanovljava se da je uslov (13) ispunjen s proizvoljnim $M \in (0, +\infty)$. U oba slučaja je, dakle, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n b_n) = +\infty = l_1 L_2$.

Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, tada obe nejednakosti u (1) važe i uz to je $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = a$ tako da se dobija

$$a + \underline{\lim_{n\to+\infty}} b_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) \leq a + \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n$$

i odatle $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) = a + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} b_n$. Na sličan način dokazuje se da je tada $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} b_n$. Ako je još $a > 0$, tada obe nejednakosti u (2) važe, tako da se dobija

$$a \, \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n b_n) \leq a \, \overline{\lim_{n\to+\infty}} b_n,$$

tj. $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n b_n) = a \, \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} b_n$, i slično $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n b_n) = a \, \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} b_n$.

2.21. Dokazati sledeća tvrđenja:

1° Za svaki realan niz (a_n) $(n \in \mathbf{N})$ je

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} (-a_n) = -\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} (-a_n) = -\underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n.$$

2° Ako je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tada je

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n}, \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n},$$

gde se, pored opšte konvencije $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, uzima da je $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

Rešenje. 1° Ako je $L = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n \in \mathbf{R}$ i $\varepsilon > 0$ je proizvoljno izabrano, tada je, prema problemu 2.19 pod 2°,

$$a_n < L + \varepsilon, \qquad \text{za dovoljno veliko } n,$$
$$a_n > L - \varepsilon, \qquad \text{za proizvoljno veliko } n,$$

tj.

$$-a_n > -L - \varepsilon, \qquad \text{za dovoljno veliko } n,$$
$$-a_n < -L + \varepsilon, \qquad \text{za proizvoljno veliko } n,$$

i odatle, ponovo prema 2.19,

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} (-a_n) = -L = -\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n.$$

Ako je $L = +\infty$, niz (a_n) je sa gornje strane neograničen; niz $(-a_n)$ je onda neograničen sa donje strane i stoga

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} (-a_n) = -\infty = -\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n.$$

Ako je, najzad, $L = -\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, pa imamo $\lim\limits_{n\to+\infty}(-a_n) = +\infty$ i odatle

$$\varliminf_{n\to+\infty}(-a_n) = +\infty = -L = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Na osnovu prethodno ustanovljenog, za bilo koji niz (a_n) je

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \varliminf_{n\to+\infty}(-(-a_n)) = -\varlimsup_{n\to+\infty}(-a_n),$$

tj.

$$\varlimsup_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

2° Neka je

(1) $$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako je $L = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n \in (0, +\infty)$ i $\varepsilon \in (0, L)$, tada je

$$a_n < L + \varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko,}$$

$$a_n > L - \varepsilon > 0, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko,}$$

i odatle

(2) $$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{L+\varepsilon}, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko,}$$

(3) $$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{L-\varepsilon}, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Prema problemu 2.19 pod 1°, iz (2) izlazi

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{L+\varepsilon},$$

a iz (3)

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{L-\varepsilon}.$$

Puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

Ako je $L = 0$, tada je, sa proizvoljno izabranim $M \in (0, +\infty)$,

$$0 < a_n < \frac{1}{M}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{a_n} > M, \qquad \text{za dovoljno veliko } n,$$

što znači da je

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty = \frac{1}{L} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

Ako je $L = +\infty$, tada, sa unapred datim $\varepsilon \in (0, +\infty)$, imamo

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \quad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Odatle,

$$0 \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \leq \varepsilon$$

1° Dokazati: Ako je niz (a_n) razložen na konačan broj nizova (1) i ako su S, $S_p, S_q, \ldots, S_s$ redom skupovi tačaka nagomilavanja nizova (a_n) i (1), tada je

$$S = S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s. \tag{2}$$

Sem toga, ako svi nizovi (1) konvergiraju ka broju a, tada i niz (a_n) konvergira ka a.

2° Dokazati primerom da divergentan niz može biti razložen na beskonačno mnogo nizova koji svi konvergiraju ka istom broju, tako da jednakost (2) ne mora biti tačna u slučaju beskonačnog razlaganja.

Rešenje. 1° Važenje inkluzije

$$S \supset S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s \tag{3}$$

očigledno je.

Neka je $x \notin S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s$. Tada postoje pozitivni brojevi $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \ldots, \varepsilon_s$ i prirodni brojevi $n_p, n_q, \ldots, n_s$ tako da je $|x - a_{p_n}| > \varepsilon_p$ za $n > n_p$, $|x - a_{q_n}| > \varepsilon_q$ za $n > n_q, \ldots, |x - a_{s_n}| > \varepsilon_s$ za $n > n_s$. Stavimo li

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_p, \varepsilon_q, \ldots, \varepsilon_s), \; m = \max(p_{n_p}, q_{n_q}, \ldots, s_{n_s}),$$

biće, očigledno, $|x - a_n| > \varepsilon$ za $n > m$, što znači da je $x \notin S$. Time je dokazana inkluzija

$$S \subset S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) izlazi (2).

Tvrđenje koje se odnosi na specijalan slučaj izlazi iz (3) i iz očigledne činjenice da je niz koji se može razložiti na konačno mnogo ograničenih nizova i sam ograničen.

2° Neka je

$a_n = 0$, ako je $n = 2^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$,

$a_n = 1$, u suprotnom slučaju.

Tada svi nizovi

$$(a_{2n-1}), \quad (a_{2(2n-1)}), \quad (a_{2^2(2n-1)}), \ldots, \quad (a_{2^k(2n-1)}), \ldots$$

konvergiraju ka broju 1 a niz (a_n) divergira.

Primedba. Ako je niz (a_n) razbijen na konačan broj podnizova, bez teškoća se dokazuje i da je:

(a) $\inf a_n$ jednak najmanjem od infimuma podnizova,

(b) $\sup a_n$ jednak najvećem od supremuma podnizova,

(c) $\underline{\lim}_{n \to +\infty} a_n$ jednak najmanjem od donjih limesa podnizova,

(d) $\overline{\lim}_{n \to +\infty} a_n$ jednak najvećem od gornjih limesa podnizova.

2.23. Dokazati da je, za svaki niz realnih brojeva (a_n),

$$(1) \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n = \inf_{n\geq 1}\,(\sup_{\nu\geq n} a_\nu),$$

$$(2) \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n = \sup_{n\geq 1}\,(\inf_{\nu\geq n} a_\nu).$$

Rešenje. Dokazujemo samo jednakost (1). Dokaz jednakosti (2) je analogan. Stavimo

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n, \qquad L_n = \sup_{\nu\geq n} a_\nu, \qquad L_0 = \inf_{n\geq 1}(\sup_{\nu\geq n} a_\nu).$$

Ako je $L = +\infty$, nejednakost

$$(3) \qquad L_0 \leq L$$

svakako važi. Ako je $L < +\infty$, i $L < a \in \mathbf{R}$, tada, prema stavu 1.1.2.18, postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $a_\nu < a\ (\nu \geq n)$, pa $L_n = \sup\limits_{\nu\geq n}(a_\nu) \leq a$. Odavde, kako je $L_0 \leq L_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, izlazi $L_0 \leq a$. Puštajući da $a \to L$, dobija se odatle (3).

Sa druge strane, iz $a_\nu \leq L_n\ (\nu \geq n;\ n = 1, 2, \ldots)$, prema 1.1.2.17, sleduje $L = \overline{\lim\limits_{\nu\to+\infty}}\, a_\nu \leq L_n\ (n = 1, 2, \ldots)$. Odatle

$$(4) \qquad L \leq \inf_{n\geq 1} L_n = L_0.$$

Iz (3) i (4) izlazi (1).

2.28. Neka je (x_n) niz realnih ili kompleksnih brojeva.

1° Dokazati da konvergencija sva tri podniza

$$(1) \qquad (x_{2n}),\ (x_{2n-1}),\ (x_{3n})$$

povlači konvergenciju niza.

2° Da li iz konvergencije dva od nizova (1) sleduje konvergencije niza (x_n)?

3° Da li konvergencija svih nizova $(x_{sn})_{n\in\mathbf{N}}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ povlači konvergenciju niza (x_n)?

Rešenje. 1° Ako su sva tri niza (1) konvergentna, tada, prvo, podnizovi

$$(2) \qquad (x_{6n}) \quad \text{i} \quad (x_{3n})$$

niza (x_{3n}) $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiraju ka istoj granici, pa zatim, kako su nizovi (2) redom podnizovi nizova (x_{2n}) i (x_{2n-1}), poslednja dva niza imaju istu graničnu vrednost. To, međutim, znači da je niz (x_n) konvergentan.

2° Odgovor je negativan za svaku kombinaciju po dva od nizova (1): za $x_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, prva dva niza (1) konvergiraju, a treći divergira; ako je $x_n = 0$ ili $x_n = 1$ prema tome da li je broj n prost ili složen, niz (x_n) divergira iako su prvi i treći od nizova (1) konvergentni; najzad, ako je $x_n = 0$ za $n = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ i $x_n = 1$ za sve ostale vrednosti n, tada drugi i treći od nizova (1) konvergiraju, a niz (x_n) divergira.

3° Odgovor je negativan, što dokazuje drugi od primera navedenih pod 2°: u ovom slučaju svi nizovi $(x_{sn})_{n\in\mathbf{N}}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ konvergiraju ka broju 1, a niz (x_n) divergira.

2.29. Dokazati Stolzovu teoremu:

Ako je y_n strogo rastući niz i pri tome $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tada

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji, kao konačan broj ili kao pozitivna ili negativna beskonačnost.

Dokaz. Neka je

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

konačan broj i neka je $\varepsilon\ (>0)$ proizvoljno izabrano. Tada postoji prirodan broj n_0 takav da je, za svaki prirodan broj k veći od n_0, $y_k > 0$ i

$$L - \varepsilon < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < L + \varepsilon,$$

tj.

$$(L-\varepsilon)(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < (L+\varepsilon)(y_k - y_{k-1}) \quad (y_k - y_{k-1} > 0).$$

Stavljajući u poslednjoj dvostrukoj nejednakosti redom $k = n_0 + 1, \ldots, n\ (n > n_0)$ i sabirajući sve te nejednakosti, dobijamo

$$(L-\varepsilon)(y_n - y_{n_0}) < x_n - x_{n_0} < (L+\varepsilon)(y_n - y_{n_0}) \qquad (n > n_0),$$

ili kako je $y_n > 0$,

$$\frac{x_{n_0}}{y_n} + (L-\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n_0}}{y_n} + (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) \qquad (n > n_0).$$

Puštajući ovde da $n \to +\infty$, dobija se

$$L - \varepsilon \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq L + \varepsilon;$$

puštajući potom da $\varepsilon \to +0$, dolazi se do zaključka da niz $\frac{x_n}{y_n}$ konvergira i da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L.$

Na sličan način ustanovljava se da tvrđenje važi i u slučajevima kada je $L = +\infty$ ili $L = -\infty$.

Primedba. Istim metodom može se dokazati i sledeće opštije tvrđenje:

Ako je y_n strogo rastući niz i pri tome $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tada je, za bilo koji realan niz x_n,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \leq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

2.30. Ako je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ $(n \geq 1)$, tada je $a_n = n^2$. Dokazati ovo metodom matematičke indukcije.

2.39. 1° Dokazati da jednačina $e^x = ax$ $(a > 0)$ ima dva, jedan ili nema ni jedan koren prema tome da li je $a > e$, $a = e$ ili $a < e$.

2° Dat je niz (u_n), gde je

$$u_{n+1} = u_n \, e^{u_n - u_{n-1}} \quad (u_0 \text{ i } u_1 \text{ fiksirani realni brojevi}).$$

Ako je $e^{u_0} \geq e u_1$ i u_0 nije veće od većeg korena jednačine

$$e^x = \frac{e^{u_0} x}{u_1}, \tag{1}$$

tada dati niz monotono konvergira ka manjem korenu jednačine (1). U svim ostalim slučajevima niz (u_n) je monoton i divergentan.

Dokazati ova tvrđenja.

2.40. Dokazati da $a_n - a_{n-1} \to d$ $(n \to +\infty)$ povlači $\dfrac{a_n}{n} \to d$ $(n \to +\infty)$.

Dokaz. Stavljajući, saglasno pretpostavci,

$$a_n - a_{n-1} = d + \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n = o(1),\ n \to +\infty),$$

dobijamo

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k + d \qquad (n \to +\infty),$$

odakle tvrđenje neposredno izlazi na osnovu Cauchyeve teoreme (1.1.2.22.1).