Ako stavimo $[x_k] = n_k$, tada je $n_k \leq x_k < n_k + 1$, odakle sleduje

$$1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + \frac{1}{x_k} \leq 1 + \frac{1}{n_k},$$

tj.

$$\Big(1 + \frac{1}{n_k + 1}\Big)^{n_k} < \Big(1 + \frac{1}{x_k}\Big)^{x_k} < \Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k + 1}.$$

Kako je

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k + 1}\Big)^{n_k} = \frac{\lim\limits_{k\to+\infty}\Big(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\Big)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to+\infty}\Big(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\Big)} = \frac{e}{1} = e$$

i

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k+1} = \lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big)^{n_k} \cdot \lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n_k}\Big) = e,$$

na osnovu teoreme 1.2.14, glava II, zaključujemo da važi i jednakost

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{x_k}\Big)^{x_k} = e. \tag{1.4.3}$$

Kako je $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljni niz za koji važi (1.4.2), iz (1.4.3) neposredno sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

Primetimo da je i

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{x} = e.$$

2. NEPREKIDNOST FUNKCIJA

2.1. Pojam neprekidnosti i neprekidne funkcije

Jednu veoma važnu klasu funkcija predstavljaju tzv. *neprekidne funkcije* koje ćemo u ovom i nekoliko narednih odeljaka detaljnije proučiti.

Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana u okolini $U(a, \delta)$ tačke $x = a$.

Definicija 2.1.1. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takvo da je za svako x, koje zadovoljava uslov $|x - a| < \delta$, ispunjena nejednakost

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon\,,$$

tada za funkciju f kažemo da je *neprekidna u tački* $x = a$.

Drugim rečima, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U(a, \delta)$ takva da $f(x) \in U(f(a), \varepsilon)$, kad god $x \in U(a, \delta)$, funkcija f je neprekidna u tački $x = a$. Jezikom matematičke logike, ova definicija se može iskazati u obliku

$$\begin{aligned}&\big(f \ \text{ je neprekidna u tački } \ x = a\big)\\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ \big((\forall x)\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Ovde je značajno uočiti da je uslov: *neprekidnost funkcije* f *u tački* $x = a$ strožiji od uslova: f *ima graničnu vrednost u tački* $x = a$. Zaista, ako je f neprekidna funkcija u tački $x = a$, tada su uslovi za egzistenciju granične vrednosti (videti definiciju 1.1.4) zadovoljeni sa $A = f(a)$. Dakle, tada je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Obrnuto, očigledno, ne važi. Na primer, granična vrednost funkcije u tački $x = a$ može postojati, a da funkcija nije definisana u toj tački (videti primer 1.1.3).

Korišćenjem pojma granične vrednosti, definicija 2.1.1 može se iskazati i na sledeći ekvivalentan način:

Definicija 2.1.1′. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$ i ako je ona jednaka $f(a)$, za funkciju f kažemo da je *neprekidna u tački* $x = a$.

Dakle, egzistencija jednakosti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ obezbeđuje neprekidnost funkcije f u tački $x = a$.

Primer 2.1.1. 1° Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$ je neprekidna u tački $x = 2$ jer je nejednakost

$$|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| = |(x - 2)^2 + 4(x - 2)| \le |x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$$

ispunjena za svako x koje zadovoljava uslov

$$|x - 2| < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2 = \delta\,.$$

U skladu sa definicijom 2.1.1′, funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$ je neprekidna u tački $x = 2$ jer je

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 1) = f(2) = 5.$$

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = \sin x$ je neprekidna u tački $x = a$ jer je za svako $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| &= 2\Big|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\Big| \\ &\le 2\Big|\sin\frac{x-a}{2}\Big| < 2\,\frac{|x-a|}{2} = |x-a| < \varepsilon,\end{aligned}$$

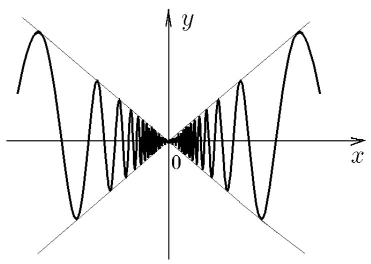
kad god je $|x - a| < \delta = \varepsilon$.

Drugim rečima, funkcija $x \mapsto \sin x$ je neprekidna u tački $x = a$ jer je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sin x = \sin a = f(a). \qquad \triangle$$

Primer 2.1.2. Neka je

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x\,\sin(1/x) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$



Sl. 2.1.1

Očigledno je da važi $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$. Kako je f parna funkcija, važi i $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0)$. Prema tome, funkcija $x \mapsto f(x) = x\,\sin(1/x)$ je neprekidna u tački $x = 0$. Grafik ove funkcije prikazan je na slici 2.1.1. $\triangle$

Definicija 2.1.2. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna u svakoj tački skupa D, kažemo da je f *neprekidna na skupu* D.

Skup svih neprekidnih funkcija na D označavamo sa $C(D)$. Ako je D segment $[a, b]$, tada skup neprekidnih funkcija na $[a, b]$ označavamo sa $C[a, b]$.

Nije teško proveriti da važe sledeća tvrđenja:

Teorema 2.1.1. *Ako su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ neprekidne na segmentu $[a, b]$, tada je i funkcija $x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ neprekidna na $[a, b]$.*

Teorema 2.1.2. *Ako su funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ neprekidne na segmentu $[a, b]$, neprekidna je i funkcija $x \mapsto f(x)g(x)$, a ako je $g(x) \neq 0$, tada je i funkcija $x \mapsto f(x)/g(x)$ neprekidna za svako $x \in [a, b]$.*

Napomena 2.1.1. Ako je sabiranje funkcija $f, g \in C[a, b]$ i njihovo množenje skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ definisano sa

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{i} \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in [a, b]),$$

može se lako proveriti da je skup $C[a, b]$ linearni prostor nad poljem $\mathbb{R}$.

Dokazaćemo neka tvrđenja koja se odnose na granične vrednosti i neprekidnost složene funkcije $x \mapsto F(x) = f\big(g(x)\big)$.

Teorema 2.1.3. *Ako funkcija $x \mapsto g(x)$ ima u tački $x = a$ graničnu vrednost b i ako je $y \mapsto f(y)$ neprekidna u tački $y = b$, tada složena funkcija $x \mapsto f\big(g(x)\big)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$ i važi*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big) = f(b).$$

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije f u tački $y = b$ sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon_1 > 0$ tako da je $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$, kad god je $y - b| < \varepsilon_1$.

S druge strane, na osnovu pretpostavke da funkcija $x \mapsto g(x)$ ima graničnu vrednost u tački $x = a$, zaključujemo da za svako $\varepsilon_1 > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|g(x) - b| = |y - b| < \varepsilon_1$, za svako x za koje je $0 < |x - a| < \delta$.

Kako je $|f(y) - f(b)| = |f(g(x)) - f(b)|$, tvrđenje je dokazano. $\square$

Teorema 2.1.4. *Neka je funkcija $x \mapsto g(x)$ neprekidna u tački $x = a$ i neka je funkcija $y \mapsto f(y)$ neprekidna u tački $y = b = g(a)$. Tada je u tački $x = a$ neprekidna i složena funkcija $x \mapsto f\big(g(x)\big)$.*

Dokaz. Na osnovu teoreme 2.1.3, važi jednakost $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Kako je g neprekidna funkcija, tj. kako je $b = \lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, sleduje

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f(b) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big) = f\big(g(a)\big),$$

čime je teorema dokazana. $\square$

Primer 2.1.3. Dokazaćemo da važe jednakosti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pre svega, ako stavimo $x = 1/t$, očigledno, imamo

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to\pm\infty}\Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t = e.$$

Kako je logaritam neprekidna funkcija[23)], na osnovu teoreme 2.1.3, neposredno dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x} = \log\Big(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\Big) = \log e = 1.$$

Za dokaz druge granične vrednosti stavimo $e^x - 1 = t$, tj. $x = \log(1+t)$, i iskoristimo već dokazanu prvu jednakost. Dakle, imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}} = 1. \qquad \triangle$$

Primer 2.1.4. Dokazaćemo sada da za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i funkciju

$$x \mapsto \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \qquad (x > -1, x \neq 0)$$

važi jednakost

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha. \tag{2.1.4}$$

Prvo, ako je $\alpha = 0$, tvrđenje je očigledno.

Drugo, ako je $\alpha \neq 0$, važe jednakosti

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x} = \frac{\alpha\log(1+x)}{x}\cdot\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}.$$

Stoga je

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha\log(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}.$$

Ako stavimo $\alpha\log(1+x) = t$, tada iz činjenice da $x \to 0$ sleduje da $t \to 0$, što znači da važi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}.$$

Tada, na osnovu primera 2.1.3, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = \alpha. \qquad \triangle$$

[23)] Funkcija $y \mapsto f(y) = \log y$ je neprekidna u intervalu definisanosti, tj. za svako $y \in (0, +\infty)$. Inače, u posmatranom slučaju od interesa je neprekidnost funkcije f u tački $y = e$.

2.2. Vrste prekida i neprekidno produženje

Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x)$, koja je definisana u intervalu $D = (\alpha, \beta)$, osim možda u tački $x = a \in (\alpha, \beta)$.

Definicija 2.2.1. Za tačku $x = a$ kažemo da je *tačka prekida funkcije* $x \mapsto f(x)$

1° ako funkcija f nije definisana u tački $x = a$, ili

2° ako je f definisana u $x = a$, ali nije neprekidna u toj tački.

U tom slučaju, za samu funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *prekidna u tački* $x = a$.

Definicija 2.2.2. Ako je $x = a$ tačka prekida funkcije $x \mapsto f(x)$ i ako postoje konačne jednostrane granične vrednosti

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b_1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = b_2,$$

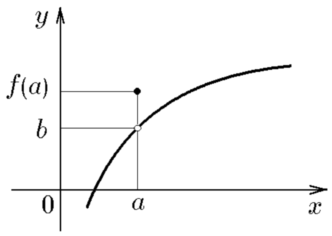
tada kažemo da je $x = a$ *tačka prekida prve vrste*. Za veličinu $s_f(a) = b_2 - b_1$ kažemo da je *skok funkcije* f u tački $x = a$.

Definicija 2.2.3. Ako za funkciju $x \mapsto f(x)$ tačka prekida $x = a$ nije prekidna tačka prve vrste, kažemo onda da je $x = a$ *tačka prekida druge vrste*.

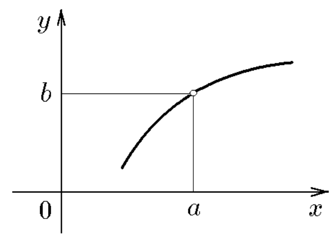
Primetimo da u slučaju prekida druge vrste bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti ne postoji kao konačna. Dakle, može se desiti da neka od ovih graničnih vrednosti ne postoji ili da je beskonačna.

Definicija 2.2.4. Ako je za funkciju $x \mapsto f(x)$ tačka $x = a$ prekid prve vrste i ako je $s_f(a) = 0$, tada za prekid kažemo da je *odstranjiv*.

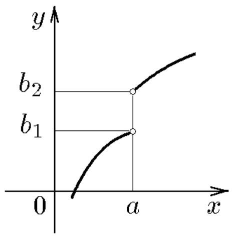
Na slikama 2.2.1–2.2.10 grafički su prikazani različiti slučajevi prekidnih funkcija.



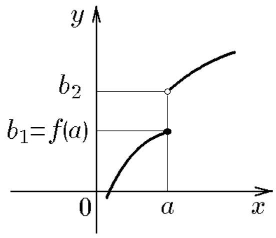
Sl. 2.2.1



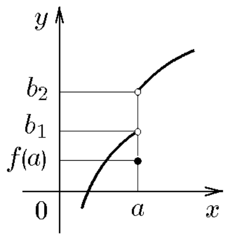
Sl. 2.2.2



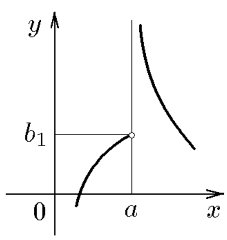
Sl. 2.2.3



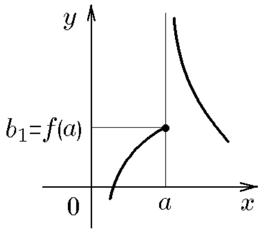
Sl. 2.2.4



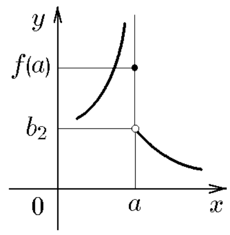
Sl. 2.2.5



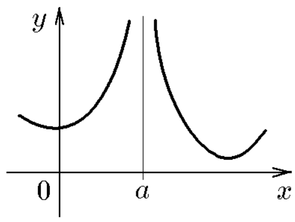
Sl. 2.2.6



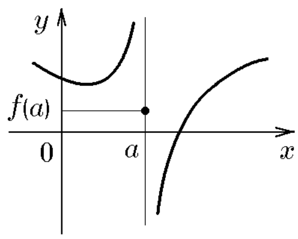
Sl. 2.2.7



Sl. 2.2.8



Sl. 2.2.9



Sl. 2.2.10

Primer 2.2.1. Funkcija $x \mapsto f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ definisana je za svako $x \neq 2$. Tačka $x = 2$ je prekid prve vrste za ovu funkciju jer leva i desna granična vrednost funkcije u tački $x = 2$ postoje. Naime,

$$b_1 = \lim_{x \to 2-} f(x) = 4 \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to 2+} f(x) = 4.$$

Kako je $b_1 = b_2$, ovaj prekid je odstranjiv. $\triangle$

Primer 2.2.2. U primeru 1.1.13, glava I, definisali smo tri prekidne funkcije $x \mapsto f(x) = [x]$, $x \mapsto g(x) = (x) = x - [x]$, $x \mapsto h(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Njihovi grafici prikazani su na slici 1.2.1, glava I. Sve prekidne tačke ovih funkcija su prekidi prve vrste.

Funkcija f je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, ali je prekidna za $x = k$, gde je k bilo koji ceo broj. Ovo znači da f ima prebrojivo mnogo prekida prve vrste. Primetimo da je u prekidnoj tački $x = k$

$$b_1 = \lim_{x \to k-} f(x) = k - 1 \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to k+} f(x) = k = f(k).$$

U svim prekidnim tačkama imamo da je

$$s_f(k) = b_2 - b_1 = k - (k-1) = 1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Slična je situacija i sa funkcijom g, za koju u prekidnim tačkama $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ imamo

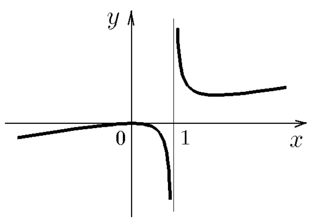
$$b_1 = \lim_{x \to k-} g(x) = 1, \qquad b_2 = \lim_{x \to k+} g(x) = 0 = g(k), \qquad s_g(k) = -1 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Funkcija h ima samo jednu prekidnu tačku $x = 0$. Ovde je $b_1 = -1$ i $b_2 = 1$. U samoj tački $x = 0$ funkcija je definisana sa $f(0) = 0$. $\triangle$

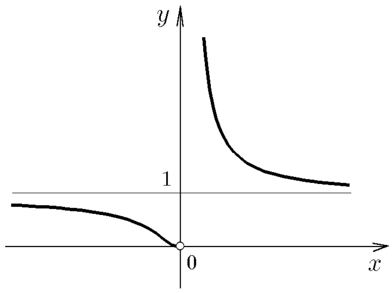
Primer 2.2.3. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2/(x-1)$ definisana je za svako $x \neq 1$. Kako je

$$b_1 = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty,$$

tačka $x = 1$ je prekid druge vrste (videti sliku 2.2.11).



Sl. 2.2.11



Sl. 2.2.12

Primer 2.2.4. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = e^{1/x}$, koja je definisana za svako $x \neq 0$. Kako je

$$b_1 = \lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad b_2 = \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty,$$

tačka $x = 0$ je prekid druge vrste (videti sliku 2.2.12). Napomenimo da i funkcije g i h, definisane za svako $x \in \mathbb{R}$ pomoću

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0), \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

imaju prekid druge vrste u tački $x = 0$. Primetimo da je kod funkcije h leva granična vrednost u tački $x = 0$ jednaka vrednosti funkcije u toj tački. $\triangle$

Primer 2.2.5. Funkcija $x \mapsto \sin(1/x)$ definisana je za svako $x \neq 0$ (videti primer 1.1.1 i grafik na slici 1.1.1). Kako leva i desna granična vrednost u tački $x = 0$ ne postoje, ova funkcija ima prekid druge vrste u tački $x = 0$. $\triangle$

Primer 2.2.6. Dirichletova funkcija

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{I}), \end{cases}$$

prekidna je u svakoj tački.

Neka je $a \in \mathbb{Q}$. Ako uzmemo da x teži ka a preko niza čiji su članovi iracionalni brojevi, imaćemo

$$\lim_{x \to a} \chi(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \chi(a) = 1,$$

što znači da je $x = a$ tačka prekida prve vrste funkcije χ.

Ako je $a \in \mathbb{I}$, uzećemo da x teži ka a preko niza čiji su članovi racionalni brojevi, pa ćemo imati

$$\lim_{x \to a} \chi(x) = 1 \qquad \text{i} \qquad \chi(a) = 0.$$

Dakle, i u tom slučaju a je tačka prekida prve vrste. Funkcija χ je, prema tome, prekidna u svakoj tački. $\triangle$

Primer 2.2.7. Neka su $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti brojevi. Posmatrajmo tzv. *Riemannovu*[24)] *funkciju*, koja se definiše pomoću

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1/n & (x = m/n \in \mathbb{Q}), \\ 0 & (x \in \mathbb{I}). \end{cases}$$

Uočimo realan broj a i interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Tada, za svako fiksirano $n_0 \in \mathbb{N}$, u intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ima konačno mnogo racionalnih brojeva $x = m/n$, za

[24)] Bernhard Riemann (1826–1866), veliki nemački matematičar.

koje je $n \leq n_0$, pa je moguće izabrati pozitivan broj $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tako da u intervalu $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ nema ni jednog od tih racionalnih brojeva, sem broja a ako je on jedan od njih. Prema tome, za svako x iz $\overset{\circ}{U}(a, \varepsilon_0)$ važi nejednakost

$$|f(x)| < \frac{1}{n_0}\,.$$

Kako se za n_0 može uzeti proizvoljno veliki broj, zaključujemo da je

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = 0.$$

Dakle, ako je a iracionalan broj, funkcija f je neprekidna u tački $x = a$ jer je u tom slučaju $f(a) = 0$. Međutim, ako je $a \in \mathbb{Q}$, tada je $f(a) \neq 0$ pa je $x = a$ prekid prve vrste za funkciju f. Prema tome, funkcija f je neprekidna u iracionalnim, a prekidna u racionalnim tačkama. $\triangle$

Razmotrimo sada detaljnije odstranjivi prekid funkcije f u tački $x = a$. Naime, to je slučaj kada funkcija f nije definisana u tački $x = a$, a pri tome leva i desna granična vrednost u toj tački postoje[25)] i međusobno su jednake

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

Za funkciju f možemo definisati njeno proširenje (videti definiciju 1.1.2, glava I) koje će biti neprekidno u tački $x = a$. Takvo *proširenje po principu neprekidnosti* za koje se koristi i termin *neprekidno produženje* je funkcija g definisana pomoću

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq a), \\ b & (x = a). \end{cases}$$

Često, kada ne može doći do zabune, za proširenje po principu neprekidnosti koristi se ista oznaka f uzimajući da je $f(a) = b$.

Primer 2.2.8. Posmatrajmo funkciju f iz primera 2.2.1 koja u tački $x = 2$ ima odstranjivi prekid. Njeno proširenje po principu neprekidnosti je neprekidna funkcija

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & (x \neq 2), \\ 4 & (x = 2). \end{cases} \qquad \triangle$$

Razmotrimo sada slučaj kada je funkcija f definisana u tački $x = a$ i ima prekid u toj tački, pri čemu važi jedna od jednakosti

$$\text{(i)} \quad b_1 = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) \qquad \text{ili} \qquad \text{(ii)} \quad b_2 = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

[25)] Ovde podrazumevamo postojanje konačne granične vrednosti.

Kažemo da je funkcija f u tački $x = a$ *neprekidna sa leve strane* ako važi jednakost (i). Isto tako, ako važi jednakost (ii), kažemo da je funkcija f u tački $x = a$ *neprekidna sa desne strane.*

Primer 2.2.9. Funkcije $x \mapsto f(x) = [x]$ i $x \mapsto g(x) = (x)$ iz primera 2.2.2 su neprekidne sa desne strane u svakoj prekidnoj tački $x = k$ ($k \in \mathbb{Z}$). $\triangle$

Naravno, sada se može zaključiti: jedna funkcija je neprekidna u nekoj tački ako je u njoj neprekidna i sa leve i sa desne strane.

Smatra se da je, po definiciji, svaka funkcija neprekidna u izolovanim tačkama svoje oblasti definisanosti.

Navešćemo bez dokaza sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.1. *Bilo koja elementarna funkcija neprekidna je u svakoj tački koja pripada njenoj oblasti definisanosti.*

2.3. Neke osobine neprekidnih funkcija

U ovom odeljku dokazaćemo nekoliko veoma važnih osobina za funkcije koje su neprekidne na segmentu $[a, b]$. Napomenimo da se ovde za neprekidnost funkcije u tačkama a i b pretpostavlja neprekidnost sa desne strane u tački $x = a$ i neprekidnost sa leve strane u tački $x = b$.

Teorema 2.3.1. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada je ona na tom segmentu ograničena, tj. postoji broj $M > 0$ tako da za svako $x \in [a, b]$ važi nejednakost $|f(x)| \le M$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svako $M > 0$ postoji $x_M \in [a, b]$ tako da je $|f(x_M)| > M$.

Uzimajući za M redom prirodne brojeve zaključujemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in [a, b]$ takvo da je

$$|f(x_n)| > n. \tag{2.3.1}$$

Očigledno, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen. Prema tome, on sadrži (videti teoremu 1.4.3, glava II) delimični niz $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ($x_{n_k} \in [a, b]$) koji je konvergentan. Neka je njegova granica α, tj. neka je $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$. Naravno, i α pripada segmentu $[a, b]$.

Kako $f \in C[a, b]$, zbog neprekidnosti funkcije u tački $x = \alpha$, imamo

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k\to+\infty} x_{n_k}) = f(\alpha). \tag{2.3.2}$$

S druge strane, kako (2.3.1) važi za svako $n \in \mathbb{N}$, to za $n = n_k$ imamo da je

$$|f(x_{n_k})| > n_k\,,$$

što znači da je

$$\lim_{k\to+\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$$

jer $n_k \to +\infty$ kada $k \to +\infty$. Ova jednakost, očigledno, protivureči jednakosti (2.3.2), po kojoj niz $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ima konačnu graničnu vrednost. Dakle, učinjena pretpostavka ne može biti ispunjena, što znači da je funkcija f ograničena na $[a, b]$. $\square$

Napomena 2.3.1. Uslovi teoreme 2.3.1 da je funkcija f neprekidna na *segmentu* je bitan. Naime, tvrđenje ne važi za funkcije neprekidne na intervalu. Na primer, funkcija $x \mapsto 1/x$ je neprekidna na intervalu $(0, 1)$, ali nije ograničena na tom intervalu.

Teorema 2.3.1 je poznata kao *prva Weierstrassova teorema.*

Teorema 2.3.2. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada u $[a, b]$ postoje bar dve tačke ξ i η takve da je*

$$f(\xi) = m = \inf_{a\le x\le b} f(x) \qquad i \qquad f(\eta) = M = \sup_{a\le x\le b} f(x).$$

Dokaz. Kako je, na osnovu teoreme 2.3.1, funkcija f ograničena, postoje vrednosti $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ i $M = \sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ za koje je

$$m \le f(x) \le M \qquad (x \in [a, b]).$$

Da bismo dokazali da postoji bar jedna tačka $\xi \in [a, b]$ takva da je $f(\xi) = m$ pretpostavimo suprotno, tj. da $f(x)$ nije jednako m ni za jedno $x \in [a, b]$. S obzirom na činjenicu da je $m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, to znači da je

$$f(x) - m > 0 \qquad (x \in [a, b]).$$

Međutim, tada je funkcija $x \mapsto 1/(f(x) - m)$ $(x \in [a, b])$ neprekidna na $[a, b]$. Kako je, na osnovu teoreme 2.3.1, ova funkcija ograničena, tj. postoji pozitivan broj λ takav da je

$$0 < \frac{1}{f(x) - m} \le \lambda \qquad (x \in [a, b]),$$

zaključujemo da je

$$f(x) \geq m + \frac{1}{\lambda} \qquad (x \in [a, b]),$$

što je u suprotnosti sa činjenicom da je $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Kako je do ove protivrečnosti došlo na osnovu učinjene pretpostavke da ne postoji $\xi \in [a, b]$ za koje je $f(\xi) = m$, zaključujemo da takva tačka, ipak, postoji.

Na sličan način, može se dokazati da postoji i tačka η iz segmenta $[a, b]$ za koju je $f(\eta) = M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. $\square$

Teorema 2.3.2 je poznata kao *druga Weierstrassova teorema*.

Napomena 2.3.2. Teorema 2.3.2 kazuje da svaka neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ dostiže svoju najmanju i svoju najveću vrednost.

Teorema 2.3.3. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i ako su $f(a)$ i $f(b)$ različitog znaka, tada u intervalu (a, b) postoji bar jedna tačka ξ za koju je $f(\xi) = 0$.*

Dokaz. Neka je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, ona u svakoj tački segmenta $[a, b]$ ima graničnu vrednost, pa i u tačkama a i b. U skladu sa teoremom 1.3.7, u okolini tačke a ima tačaka x za koje je $f(x) < 0$, a u okolini tačke b tačaka za koje je $f(x) > 0$.

Kako je $[a, b]$ ograničen skup, takav je i skup onih tačaka x iz $[a, b]$ za koje je $f(x) < 0$. Svakako, taj skup ima svoj supremum. Neka je to tačka ξ. Pokazaćemo da je $f(\xi) = 0$.

Pretpostavimo da je $f(\xi) < 0$. Tada, prema teoremi 1.3.7, u $[\xi, b]$ ima tačaka za koje je $f(x) < 0$, što znači da ξ nije supremum skupa takvih tačaka. Kako ovo protivureči pretpostavci, zaključujemo da $f(\xi)$ nije negativno. Na sličan način, može se pokazati da $f(\xi)$ nije pozitivno. Prema tome, važi $f(\xi) = 0$. $\square$

Ovaj rezultat je poznat kao *prva Bolzano–Cauchyeva teorema*.

Teorema 2.3.4. *Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na $[a, b]$ i ako je $f(a) < f(b)$, tada za svako C za koje je $f(a) < C < f(b)$ postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je $f(\xi) = C$.*

Dokaz. Funkcija $x \mapsto g(x) = f(x) - C$ $(x \in [a, b])$ je neprekidna na segmentu $[a, b]$, a u tačkama $x = a$ i $x = b$ ima vrednosti

$$g(a) = f(a) - C < 0 \qquad \text{i} \qquad g(b) = f(b) - C > 0.$$

Kako funkcija g ispunjava uslove teoreme 2.3.3, zaključujemo da postoji tačka $\xi \in [a, b]$ takva da je $g(\xi) = 0$, tj. $f(\xi) = C$. $\square$

Tvrđenje 2.3.4 poznato je kao *druga Bolzano–Cauchyeva teorema*.

Na osnovu prethodnog može se zaključiti da neprekidna funkcija $x \mapsto f(x)$ na $[a, b]$ uzima sve vrednosti iz segmenta $[m, M]$, gde su $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ i $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Uz dodatni uslov da je funkcija strogo monotona na $[a, b]$, može se dokazati da postoji njena inverzna funkcija $y \mapsto f^{-1}(y)$ koja je neprekidna na segmentu $[m, M]$ i iste je monotonosti kao i funkcija f. Napomenimo da se egzistencija i monotonost inverzne funkcije mogu dokazati izostavljanjem uslova o neprekidnosti funkcije f na $[a, b]$ (videti teoremu 2.7.1, glava I).

2.4. Osobine monotonih funkcija

U odeljku 1.5, glava I, definisali smo monotone funkcije i ukazali na neke njihove osobine. S obzirom da monotone funkcije predstavljaju jednu veoma važnu klasu funkcija, ovde ćemo proučiti još neke njihove osobine sa gledišta egzistencije graničnih vrednosti, kao i u odnosu na neprekidnost.

Teorema 2.4.1. *Ako je $x \mapsto f(x)$ monotona funkcija na segmentu $[a, b]$, tada postoje konačne granične vrednosti*

$$1^\circ \quad \lim_{x \to c-} f(x), \quad \lim_{x \to c+} f(x) \quad (a < c < b); \qquad 2^\circ \quad \lim_{x \to a+} f(x), \quad \lim_{x \to b-} f(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f neopadajuća funkcija. U tom slučaju je

$$f(x) \leq f(c) \qquad (a \leq x < c),$$

što znači da važe nejednakosti

$$f(x) \leq \sup_{a \leq x < c} f(x) = M \leq f(c) \qquad (c < b). \tag{2.4.1}$$

Odavde sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $x_\varepsilon \in [a, c)$, tako da važi

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon). \tag{2.4.2}$$

Kako je $x_\varepsilon < c$, stavimo $\delta = c - x_\varepsilon > 0$. Tada za svako $x \in (x_\varepsilon, c)$, tj. za svako $x \in (c - \delta, c)$, važi nejednakost

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x) \tag{2.4.3}$$