1.12. Taylorova formula

Jedna od fundamentalnih teorema u matematičkoj analizi i koja ima velike primene u mnogim oblastima nauke i tehnike je tzv. *Taylorova*[36] *teorema*, koju ćemo u ovom odeljku prvo dokazati, a zatim i detaljnije razmotriti.

Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ n puta diferencijabilna u tački $x = a$. Za *polinomsku funkciju*[37] $x \mapsto T_n(x)$ određenu pomoću

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{1.12.1}$$

kažemo da je *Taylorov polinom* koji u tački $x = a$ odgovara funkciji f.

Napomenimo da se za $a = 0$ (1.12.1) svodi na tzv. *Maclaurinov*[38] *polinom*

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

Nije teško zaključiti da za Taylorov polinom $x \mapsto T_n(x)$, definisan pomoću (1.12.1) važe jednakosti

$$T_n(a) = f(a),\quad T_n'(a) = f'(a),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1.12.2}$$

Obrnuto, polinomska funkcija

$$x \mapsto P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n \tag{1.12.3}$$

za koju je

$$P(a) = f(a),\quad P'(a) = f'(a),\ \ldots,\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

poklapa se sa Taylorovim polinomom (1.12.1). Zaista, diferenciranjem polinomske funkcije (1.12.3) nalazimo da je

$$P^{(k)}(a) = k!c_k = f^{(k)}(a) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

tj. $P(x) \equiv T_n(x)$.

---

[36] Brook Taylor (1685–1731), engleski matematičar.
[37] Detaljnije o polinomima može se naći u [15, glava IV].
[38] Colin Maclaurin (1698–1746), škotski matematičar.

Jednakosti (1.12.2) ukazuju da se funkcija f i njen Taylorov polinom T_n „slično ponašaju" tako da se $T_n(x)$ može uzeti kao aproksimacija za $f(x)$ u okolini tačke $x = a$.

Zbog toga ćemo, nadalje, razmotrati razliku $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Na primer, za $n = 1$ imamo $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, pa je

$$R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Kako $R_1(x)$ predstavlja razliku priraštaja funkcije i njenog diferencijala u tački $x = a$, imamo da je

$$R_1(x) = o(x - a) \qquad (x \to a).$$

U opštem slučaju važi:

Teorema 1.12.1. *Neka je* $x \mapsto f(x)$ n *puta diferencijabilna u tački* $x = a$ *i neka je* $x \mapsto T_n(x)$ *njen Taylorov polinom u tački* $x = a$. *Tada je*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o\left((x - a)^n\right) \qquad (x \to a). \tag{1.12.4}$$

Dokaz. Funkcija $x \mapsto R_n(x)$, definisana pomoću (1.12.4), n puta je diferencijabilna u tački $x = a$, a pri tome važe jednakosti

$$R_n(a) = R_n'(a) = \cdots = R_n^{(n)}(a) = 0. \tag{1.12.5}$$

Uzastopnom primenom L'Hospitalove teoreme dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} \\
&= \frac{R_n^{(n)}(a)}{n!} = 0,
\end{aligned}$$

što, zapravo, znači da je $R_n(x)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na takođe beskonačno malu veličinu $(x-a)^n$, kada $x \to a$. Dakle, važi jednakost (1.12.4). $\square$

Naglasimo da se $R_n(x)$ naziva *ostatak* i da je pomoću (1.12.4) dat tzv. *Peanov*[39] *oblik ostatka*. Tvrđenje 1.12.1 poznato je kao *Taylorova teorema*, a jednakost (1.12.4), tj. jednakost

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a) \tag{1.12.6}$$

kao *Taylorova formula*.

Primer 1.12.1. Za funkciju $x \mapsto e^x$ važe sledeće Taylorove formule:

1° $e^x = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + o(x^2) \quad (x \to 0),$

2° $e^x = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + o(x^n) \quad (x \to 0),$

3° $e^x = 2\Big(1 + \frac{1}{1!}(x-\log 2) + \frac{1}{2!}(x-\log 2)^2\Big) + o((x-\log 2)^2).$

Poslednja formula važi kada $x \to \log 2$. $\triangle$

Primer 1.12.2. Neka je $f(x) = \sqrt{x}$. Tada je:

1° $\sqrt{x} = 1 + \frac{1/2}{1!}\,(x-1) - \frac{1/4}{2!}\,(x-1)^2 + o((x-1)^2) \quad (x \to 1),$

2° $\sqrt{x} = 2 + \frac{1/4}{1!}\,(x-4) + o(x-4) \quad (x \to 4).$ $\triangle$

Primer 1.12.3. Neka su $T_5,\ T_6,\ T_7,\ T_8$ Taylorovi polinomi koji odgovaraju funkciji $x \mapsto \sin x$ u tački $x=0$. Kako je $T_6(x) \equiv T_5(x)$ i $T_8(x) \equiv T_7(x)$, nije teško zaključiti da važe sledeće Taylorove formule:

1° $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \quad (x \to 0),$

2° $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8) \quad (x \to 0),$

ali i formula

3° $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (x \to 0).$

Isto tako imamo da je

4° $\sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\Big(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\Big) \quad (x \to \pi/2).$

[39] Giuseppe Peano (1858–1932), italijanski matematičar.

Na sličan način dobijamo Taylorove formule:

$$5^\circ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \quad (x \to 0),$$

$$6^\circ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7) \quad (x \to 0),$$

$$7^\circ \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0),$$

kao i formulu

$$8^\circ \quad \cos x = -1\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{2!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 - \frac{1}{3!}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^4\Big),$$

kada $x \to \pi/2$.

Za stepenu i logaritamsku funkciju važe formule:

$$9^\circ \quad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0),$$

$$10^\circ \quad \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0). \quad \triangle$$

Napomena 1.12.1. Iz formule 9°, za $\alpha = n$, neposredno sleduje poznata binomna formula

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

jer je za $k > n$ uvek $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$.

Isto tako, iz formule 9°, za $\alpha = -1$ i $\alpha = 1/2$, dobijamo formule

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0)$$

i

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1!!}{4!!}x^2 + \frac{3!!}{6!!}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

Za $\alpha = -1/2$, iz formule 9°, dobijamo Taylorovu formulu

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1!!}{2!!}x + \frac{3!!}{4!!}x^2 - \frac{5!!}{6!!}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

Za n puta diferencijabilnu funkciju f u tački $x = a$ Taylorov polinom T_n je jedinstven. Naime, ako je P_n neki polinom stepena n za koji važi

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a), \tag{1.12.7}$$

tada se može dokazati da je $P_n \equiv T_n$. Zaista, na osnovu (1.2.6) i (1.2.7) zaključujemo da je

$$P_n(x) - T_n(x) = o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

tj.

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

što je moguće samo ako je $P_n(x) \equiv T_n(x)$.

Dakle, ako na bilo koji način nađemo polinom $P_n(x)$ za koji važi (1.12.7), tada je on Taylorov polinom za n puta diferencijablinu funkciju f u tački $x = a$.

Primer 1.12.4. Na osnovu formule 2° iz primera 1.12.1 važi

$$e^{2x} = 1 + \frac{1}{1!}\,(2x) + \frac{1}{2!}\,(2x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,(2x)^n + o((2x)^n) \qquad (x \to 0),$$

tj.

$$e^{2x} = 1 + \frac{2}{1!}\,x + \frac{2^2}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{2^n}{n!}\,x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0).$$

Isto tako je

$$e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}\,(x^2) + \frac{1}{2!}\,(x^2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,(x^2)^n + o((x^2)^n) \qquad (x \to 0),$$

tj. važi

$$e^{x^2} = 1 + \frac{1}{1!}\,x^2 + \frac{1}{2!}\,x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^{2n} + o(x^{2n}) \qquad (x \to 0). \quad \triangle$$

Pretpostavimo sada da je poznata Taylorova formula koja u tački $x = a$ odgovara funkciji $x \mapsto f'(x)$, tj. neka je

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

gde su a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ poznati koeficijenti. S obzirom da ta formula ima oblik

$$f'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

kada $x \to a$, upoređujući ove formule, nije teško zaključiti da za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ važe jednakosti

$$\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} = a_k, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} = \frac{a_k}{k+1}\,.$$

Stoga, Taylorova formula koja u tački $x = a$ odgovara funkciji f ima oblik

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ &= f(a) + \frac{a_0}{1}\,(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\,(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}). \end{aligned}$$

U sledećim primerima koristićemo ovaj postupak za dobijanje Taylorovog razvoja.

Primer 1.12.5. Neka je $f(x) = \log(1+x)$. Kako je $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ i kako je

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0),$$

na osnovu prethodnog zaključujemo da važi formula

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + o(x^{n+1}) \qquad (x \to 0).$$

Primer 1.12.6. Iz Taylorove formule

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \qquad (x \to 0),$$

na osnovu izloženog dobijamo da, kada $x \to 0$, važi formula

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{7}\,x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+1}). \qquad \triangle$$

Primer 1.12.7. Kako je

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}\,,$$

na osnovu 9° iz primera 1.12.3 imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 - \tbinom{-1/2}{1}x + \tbinom{-1/2}{2}x^2 - \tbinom{-1/2}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n\tbinom{-1/2}{n}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{1!!}{2!!}x + \frac{3!!}{4!!}x^2 + \frac{5!!}{6!!}x^3 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n), \end{aligned}$$

kada $x \to 0$. Odavde neposredno dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1!!}{2!!}x^2 + \frac{3!!}{4!!}x^4 + \frac{5!!}{6!!}x^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + o(x^{2n}) \quad (x \to 0).$$

Primenom izloženog postupka, može se zaključiti da važi

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{3!}\,x^3 + \frac{3!!}{5!}\,x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0). \qquad \triangle$$

Obrnuto, iz Taylorove formule za funkciju f može se odrediti odgovarajuća Taylorova formula za funkciju f' neposrednim diferenciranjem.

Primer 1.12.8. Kako je

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o((x^{2n+2})) \qquad (x \to 0),$$

neposredno dobijamo

$$(\sin x)' = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad (x \to 0).$$

Isto tako, iz Taylorove formule

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \qquad (x \to 0),$$

sleduje

$$\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + o(x^{n-1}) \qquad (x \to 0). \qquad \triangle$$

Napomena 1.12.2. Navedene mogućnosti određivanja odgovarajućih Taylorovih formula znače, u stvari, da je za svaku funkciju njen Taylorov polinom uočenog stepena jedinstven.

Naredne tri teoreme dokazaćemo pod dodatnom pretpostavkom da funkcija f u nekoj okolini tačke a $(x \in U(a,\delta))$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$.

Teorema 1.12.2. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ zadovoljava uslove Taylorove teoreme u tački $x = a$ i ako za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$, tada u okolini $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ postoji tačka ξ tako da važi jednakost*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}\,(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p \qquad (p > 0). \tag{1.12.7}$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $t \mapsto \varphi(t)$ definisanu pomoću

$$\varphi(t) = f(x) - \Big(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big),$$

koja je, očigledno, diferencijabilna i za čiji izvod važi jednakost

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = &- f'(t) - \Big(f''(t)(x-t) - f'(t)\Big)\\ &- \Big(\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)\Big)\\ &\vdots\\ &- \Big(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big),\end{aligned}$$

tj.

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Neka je $x \mapsto \psi(t)$ $(t \in U(a,\delta))$ za sada proizvoljna diferencijabilna funkcija za koju je $\psi'(t) \neq 0$. Kako je $\varphi(x) = 0$ i $\varphi(a) = R_n(x)$, primenom Cauchyeve teoreme, neposredno zaključujemo da važi jednakost

$$\frac{R_n(x)}{\psi(x)-\psi(a)} = -\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)} = -\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

gde je $a < \xi < x$ ili $x < \xi < a$, tj. $\xi = a + \theta(x-a)$ $(0 < \theta < 1)$, što znači da i tačka ξ, takođe, pripada $\mathring{U}(a,\delta)$.

Na osnovu prethodnog dobijamo da je

$$R_n(x) = -\frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi'(\xi)} \cdot \varphi'(\xi) \qquad (\xi \in \mathring{U}(a,\delta)),$$

tj.

$$R_n(x) = \frac{\psi(x)-\psi(a)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad (\xi \in \mathring{U}(a,\delta)). \tag{1.12.8}$$

Kako je po pretpostavci $f^{(n+1)}$ ograničena funkcija, očigledno $R_n(x) \to 0$, kada $x \to a$.

Ako stavimo $\psi(t) = (x-t)^p$ $(p > 0)$, jednakost (1.12.8) postaje (1.12.7), čime je teorema dokazana. $\square$

Za ostatak $R_n(x)$ iskazan pomoću (1.12.7) kažemo da je *Schlömlich*[40]*-Rocheov*[41] *oblik ostatka.*

Napomenimo da se ovom obliku može dati nešto drugačija forma uzimajući da je $\xi = a + \theta(x-a)$, gde je $0 < \theta < 1$. Tada je $x - \xi = x - a - \theta(x-a) = (1-\theta)(x-a)$, pa jednakost (1.12.7) postaje

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!p}\,(1-\theta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1}, \tag{1.12.9}$$

gde je $0 < \theta < 1$.

Teorema 1.12.3. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ zadovoljava uslove Taylorove teoreme u tački $x = a$ i ako za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$, tada u okolini $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ postoji tačka ξ tako da važi jednakost*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}. \tag{1.12.10}$$

Dokaz. Ako u (1.12.7) stavimo $p = n+1$, tvrđenje teoreme sleduje neposredno. $\square$

Za ostatak $R_n(x)$ određen pomoću (1.12.10) kažemo da je *Lagrangeov oblik ostatka.* Napomenimo da u tom slučaju Taylorova formula ima oblik

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

Za $n = 0$, dobijamo jednakost

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

koja predstavlja Lagrangeovu formulu. Dakle, teorema 1.12.3 je jedno uopštenje Lagrangeove teoreme 1.11.4.

---

[40] Oscar Schlömlich (1864–1933), nemački matematičar.
[41] Edwards Albert Roche (1839–1883), francuski astronom i matematičar.

Teorema 1.12.4. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ zadovoljava uslove Taylorove teoreme u tački $x = a$ i ako za svako $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ ima ograničen $(n+1)$-vi izvod $f^{(n+1)}(x)$, tada za $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ važi jednakost*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}\,(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}, \tag{1.12.11}$$

gde je $0 < \theta < 1$.

Dokaz. Ako u (1.12.9) stavimo $p = 1$, dobijamo jednakost (1.12.11). □

Za ostatak $R_n(x)$ u obliku (1.12.11) kažemo da je *Cauchyev oblik ostatka*.

Kao što smo videli, Taylorova formula (1.12.6) ima oblik

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

odakle zaključujemo da je polinom T_n glavni deo funkcije f kada $x \to a$.

Napomenimo da se Taylorovoj formuli (1.12.6) može dati i drugačiji oblik. Naime, ako se u (1.12.6) umesto x stavi $x+h$ i umesto a stavi x, dobija se

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \frac{f''(x)}{2!}\,h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n) \quad (h \to 0),$$

što, takođe, predstavlja Taylorovu formulu funkcije $x \mapsto f(x)$, ali sada u proizvoljnoj tački x.

Pokazaćemo sada kako se Taylorova formula može primeniti na određivanje graničnih vrednosti funkcija, o čemu govori sledeća teorema:

Teorema 1.12.5. *Neka su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ dovoljan broj puta diferencijabilne funkcije i neka je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad (a \in \overline{\mathbb{R}}).$$

Ako su n i m prirodni brojevi i ako važe jednakosti

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad (x \to a),$$

i

$$g(x) = \frac{g^{(m)}(a)}{m!}\,(x-a)^m + o((x-a)^m) \qquad (x \to a),$$

tada je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & (m<n), \\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(m)}(a)} & (m=n), \\ \infty & (m>n). \end{cases}$$

Dokaz. Na osnovu učinjenih pretpostavki neposredno dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)}{\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + o((x-a)^m)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a}\Big(\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)\Big)}{\lim\limits_{x\to a}\Big(\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + o((x-a)^m)\Big)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{\dfrac{g^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m} \\
&= \frac{m!}{n!}\,\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(m)}(a)}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{n-m},
\end{aligned}$$

odakle sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

Primer 1.12.9. Neka je $x \mapsto \dfrac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$.

Kao što smo videli, kada $x\to 0$, važe formule

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),\quad \arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),\quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

a nije teško zaključiti da važi i

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \qquad (x\to 0).$$

Stoga je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\sin x}{\tan x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\Big(x-\dfrac{1}{3}\,x^3+o(x^3)\Big)-\Big(x-\dfrac{1}{3!}\,x^3+o(x^3)\Big)}{\Big(x+\dfrac{1}{3}\,x^3+o(x^3)\Big)-\Big(x+\dfrac{1}{3!}\,x^3+o(x^3)\Big)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}\,x^3+o(x^3)}{\dfrac{1}{6}\,x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{6}\,x^3}{\dfrac{1}{6}\,x^3}=-1.\qquad\triangle$$

Primer 1.12.10. Odredićemo graničnu vrednost $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot(1+x)^{-1/x}-1}{x}$.

Kako je

$$(1+x)^{-1/x}=e^{-\log(1+x))/x}\qquad\text{i}\qquad\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

neposredno dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot(1+x)^{-1/x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot e^{-1+x/2+o(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x/2+o(x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x/2+o(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x/2+o(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x/2}{x}=\frac{1}{2}.\qquad\triangle$$

Napomena 1.12.3. Uporediti ovaj primer i primer 1.11.12.

Kako je polinom $T_n(x)$ glavni deo funkcije $x\mapsto f(x)$ kada $x\to a$, to se $f(x)$ u nekoj okolini $U(a,\delta)$ može aproksimirati polinomom $T_n(x)$,

$$f(x)\approx T_n(x)\qquad(x\in U(a,\delta))\,,\tag{1.12.12}$$

pri čemu činimo grešku koja je jednaka ostatku $R_n(x)$. Greška je beskonačno mala veličina kada $x\to a$ i to reda n u odnosu na beskonačno malu veličinu $x-a$. U aproksimaciji (1.12.12) mogu se uočiti sledeći elementi: (1) stepen n Taylorovog polinoma; (2) interval aproksimacije $(a-\delta,a+\delta)$, tj. okolina $U(a,\delta)$; (3) učinjena greška $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, kada $x\in(a-\delta,a+\delta)$. U vezi sa tim postavljaju se sledeća tri pitanja:

1° Ako je $U(a,\delta)$ data okolina tačke a i ako je stepen Taylorovog polinoma dati prirodan broj n, izvršiti procenu greške $R_n(x)$ koja se čini aproksimacijom funkcije f njenim Taylorovim polinomom T_n ;

2° Ako je $U(a,\delta)$ data okolina tačke a i ako se aproksimacijom (1.12.12) načini greška $R_n(x)$ za koju se unapred traži da za svako $x \in U(a,\delta)$ ne sme biti veća od zadate vrednosti ε, odrediti stepen polinoma T_n ;

3° Ako funkciji $x \mapsto f(x)$ odgovara Taylorov polinom T_n uočenog stepena n i ako je zadata granica greške ε, odrediti okolinu $U(a,\delta)$ tako da se aproksimacijom (1.12.12) ne načini greška veća od zadate, tj. da je u toj okolini uvek $|R_n(x)| \le \varepsilon$.

Analiziraćemo svako od ovih pitanja na pojedinačnim primerima.

Primer 1.12.11. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto e^x \quad (-1 \le x \le 1)$ i Taylorovu formulu

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + R_n(x),$$

gde je ostatak $R_n(x)$ dat u Lagrangeovom obliku

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad (-1 < \xi < 1).$$

Odredićemo najmanji prirodan broj n tako da je

$$|R_n(x)| = |e^x - T_n(x)| \;<\; 10^{-3}$$

za svako $x \in [-1,1]$. Kako je

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,|x|^{n+1} \\ &\le \frac{e^{|\xi|}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

nejednakost $|R_n(x)| < 10^{-3}$ važi ako je $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, tj. ako je $n > 6$.

Prema tome, može se uzeti da je

$$e^x \;\approx\; 1 + x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{6!}\,x^6,$$

pri čemu je greška manja od 10^{-3}, za svako $x \in [-1,1]$.

Za $x = 1$ dobijamo

$$e \;\approx\; 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} = 2.718055\ldots.$$