

1. PREGLED TEORIJE NIZOVA I REDOVA

1.1. NIZOVI

1.1.1. DEFINICIJE

1.1.1.1. Svaka funkcija $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ naziva se *nizom kompleksnih brojeva* ili kraće, *kompleksnim nizom*. Ako je, specijalno, $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, tada se a naziva *nizom realnih brojeva* ili *realnim nizom*. Kompleksni i realni nizovi zovu se *brojni* ili *numerički nizovi*.

U teoriji brojnih nizova umesto $a(n)$ često se piše a_n . Uređeni par (n, a_n) naziva se *n-tim članom niza a*. Često se, radi kraćeg izražavanja, kaže da je a_n *n-ti član niza a*. Broj n naziva se tada *indeksom člana a_n*.

Sam niz a obično se označava sa $a_n (n = 1, 2, \dots)$.

Upotrebljavaju se takođe sledeće oznake:

$$a_n (n \in \mathbf{N}); (a_n)_{n \in \mathbf{N}}; (a_n); (a_1, a_2, \dots); a_n.$$

Skup $\mathbf{N}$ je *domen* ili *skup indeksa* niza (a_n) (videti 0.8).

Skup $a(\mathbf{N})$ naziva se *skupom vrednosti* ili *antidomenom* niza (a_n) (videti 0.8).

U prethodnom izlaganju skup $\mathbf{N}$ može se zameniti skupom $\mathbf{N}_m = \{m, m + 1, \dots\}$, gde je $m \in \mathbf{N}_0$. Kako se ovaj opštiji slučaj u pogledu pojmova i rezultata ne razlikuje bitno od slučaja kada je domen niza $\mathbf{N}$ (stav 1.2.2.1), u ovom pregledu teorije nizova ograničićemo se na slučaj niza sa domenom $\mathbf{N}$.

1.1.1.2. Po definiciji, niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je *ograničen* ili *neograničen* zajedno sa svojim skupom vrednosti.

Za realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ brojevi $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$ i $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$, koji se redom nazivaju *supremum* i *infimum* niza, definisani su sa

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup a(\mathbf{N}), \quad \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf a(\mathbf{N}).$$

Ako je $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n < +\infty$, kaže se da je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *s gornje strane ograničen*; u suprotnom slučaju, isti niz je *s gornje strane neograničen*. Pojmovi »s donje strane ograničen niz« i »s donje strane neograničen niz« analogno se definišu. Za niz koji je i s donje strane ograničen kaže se kratko da je *ograničen*; ako niz nije ograničen, kaže se da je *neograničen*.

1.1.1.3. Monotoni nizovi. Ako je $a_n \leq a_{n+1} (n \in \mathbf{N})$, kaže se da je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (*monotono*) *rastući*. Ako je $a_n \geq a_{n+1} (n \in \mathbf{N})$, niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je (*monotono*) *opadajući*. Prethodnim nejednakostima u kojima su redom znaci $\leq$ i $\geq$ zamenjeni

sa $< i >$ redom se definišu *strogo* (ili *striktno*) *rastući* i *strogo* (ili *striktno*) *opadajući* niz. U sva četiri slučaja kaže se da je niz *monoton*; u poslednja dva kaže se i da je on *strogo* ili *striktno* *monoton*. (U drukčijoj terminologiji, umesto rastući, opadajući, strogo rastući i strogo opadajući niz kaže se redom: neopadajući, nerastući, rastući i opadajući niz. U daljem izlaganju korist ćemo uvek prvi način izražavanja.)

Realan niz može monotono rasti, monotono opadati, itd. i za $n \geq m$, gde je $m \in \mathbf{N}$ fiksirano, ili za dovoljno veliko n , ukoliko postoji $m \in \mathbf{N}$ (koje se ne precizira) takvo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za $n \geq m$, itd.

Upotrebljavaju se takođe sledeće oznake:

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbf{N}} & \nearrow \text{rastući niz;} \\ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} & \searrow \text{opadajući niz;} \\ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} & \uparrow \text{strogo rastući niz;} \\ (a_n)_{n \in \mathbf{N}} & \downarrow \text{strogo opadajući niz.} \end{aligned}$$

1.1.1.4. Podniz. Za niz b_n ($n = 1, 2, \dots$) kaže se da je *podniz* niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ako je

$$b_n = a_{p_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gde je p_n ($n = 1, 2, \dots$) strogo rastući niz prirodnih brojeva.

1.1.1.5. Konvergencija. Granična vrednost. Kaže se da je niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *konvergentan* ili da *konvergira* (teži) ka broju a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $n_0 \in \mathbf{N}$ da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_0;$$

drugim rečima, ako svaka okolina* tačke a sadrži sve članove niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ čiji su indeksi dovoljno veliki. U tom slučaju, broj a zove se *granična vrednost* ili *limes* niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i piše se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a, \quad \text{ili} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Često se za niz kaže samo da *konvergira* ili da je *konvergentan*, bez pominjanja broja ka kome konvergira.

Niz koji konvergira ka nuli zove se *nula-niz*.

Za niz koji ne konvergira kaže se da *divergira* ili da je *divergentan*.

1.1.1.5.1. Za realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ kaže se da teži ka $+\infty$ (ka pozitivnoj beskonačnosti) i piše

$$a_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty), \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty,$$

ako za svako $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $a_n > M$ za svako $n \geq n_0$. Analogno se definiše značenje iskaza »niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ teži ka $-\infty$ (ka negativnoj beskonačnosti)«; odgovarajuća oznaka je

$$a_n \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow +\infty), \quad \text{ili} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

Za realne nizove koji teže ka $+\infty$ ili ka $-\infty$ kaže se takođe da *stvarno divergiraju*. Realni nizovi koji nisu ni konvergentni ni stvarno divergentni nazivaju se *oscilatornim nizovima*. S obzirom na druge varijante prethodnih oznaka, ako $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), odnosno $a_n \rightarrow -\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), kaže se i da je $+\infty$, odnosno $-\infty$, *limes* niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

* Okolinom tačke (broja) a u sistemu kompleksnih brojeva naziva se (u jednoj varijanti tog pojma) svaki disk (otvoreni krug) sa centrom u toj tački i poluprečnika $\varepsilon > 0$, a u sistemu realnih brojeva svaki interval oblika $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$).

1.1.1.5.2. Kaže se da kompleksan niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *teži ka ∞ (ka beskonačnosti)* i piše

$$a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow +\infty), \text{ ili } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty,$$

ako $|a_n| \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty)$.

1.1.1.6. Tačka nagomilavanja. Za kompleksan broj a kaže se da je tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $n_0 \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $n \geq n_0$ takav da je $|a_n - a| < \varepsilon$; drugim rečima, ako svaka okolina tačke a sadrži članove niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sa proizvoljno velikim indeksima.

1.1.1.7. Donji i gornji limes. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ realan niz i S skup svih njegovih tačaka nagomilavanja (S može biti i prazan skup). *Gornjim limesom* (sinonimi: *limes superior*, *gornja tačka nagomilavanja*) niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naziva se element L skupa $\mathbf{R}_\infty$ koji se određuje na sledeći način:

$$L = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je niz } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ neograničen s gornje strane;} \\ -\infty, & \text{ako je niz } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ s gornje strane ograničen i skup } S \text{ je prazan (tj. ako je } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty); \\ \sup S, & \text{ako je niz } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ s gornje strane ograničen i skup } S \text{ nije prazan.} \end{cases}$$

Analogno se definiše *donji limes* (*limes inferior*, *donja tačka nagomilavanja*) niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Gornji limes niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ označava se jednim od sledeća dva simbola

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{ili} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

a donji limes istog niza jednim od simbola

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{ili} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Prema odgovarajućim tvrdenjima u 1.1.2, gornji i donji limes jednoznačno su određeni (kao elementi skupa $\mathbf{R}_\infty$) za svaki realan niz i svaki od njih je tačka nagomilavanja niza u slučaju kad je konačan. Stoga, ako je $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbf{R}$, imamo

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \max S, \text{ a ako je } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbf{R}, \text{ tada je } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = \min S.$$

Često se u slučaju kad je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neograničen s gornje, odnosno s donje strane, kaže da je simbol $+\infty$, odnosno $-\infty$, njegova tačka nagomilavanja. Ako se ova konvencija usvoji, tada se, uz na prirodan način na skup $\mathbf{R}_\infty$ proširen poredak skupa $\mathbf{R}$ (videti 0.10), gornji i donji limes mogu bez ograničenja definisati na sledeći način:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup S, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf S,$$

a takođe i ovako:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \max S, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \min S.$$

1.1.1.8. Ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, piše se $a_n \sim b_n$ ($n \rightarrow +\infty$) i kaže da se niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *asimptotski ponaša* kao niz $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (ili da je prvi niz *asimptotski jednak* drugom).

Neka su (a_n) i (b_n) realni nizovi i neka je $b_n > 0$ ($n \in \mathbf{N}$). Tada se piše:

$a_n = O(b_n)$ ako je niz $\frac{a_n}{b_n}$ ograničen; $a_n = o(b_n)$ ako niz $\frac{a_n}{b_n}$ teži ka 0.

1.1.2. TEOREME O KONVERGENCIJI I O TAČKAMA NAGOMILAVANJA NIZOVA

Na početku navodimo jedan stav iz osnova matematičke analize, koji posebno igra fundamentalnu ulogu u teoriji brojnih nizova.

1.1.2.0. Svaki neprazan i sa gornje strane ograničen skup realnih brojeva ima supremum, a svaki neprazan i sa donje strane ograničen skup realnih brojeva ima infimum.

Navedeni stav ne odnosi se direktno na nizove, ali se bitno koristi u dokazu nekih najvažnijih od sledećih teorema o brojnim nizovima. Sve one od tih teorema u čijoj formulaciji ili u vezi s kojima nije izričito rečeno da je reč o realnim nizovima odnose se na opšti slučaj kompleksnog niza.

1.1.2.1. Ako se doda ili oduzme konačan broj članova nizu, ili se izmene vrednosti konačnog broja njegovih članova,¹ ne menjaju se: njegova ograničenost (odnosno neograničenost), njegova konvergencija, granična vrednost i tačke nagomilavanja.

1.1.2.2. Granična vrednost niza je i njegova tačka nagomilavanja. Obrnuto ne važi. Niz može imati samo jednu graničnu vrednost.

1.1.2.3. Ako niz teži ka a , tada i svaki njegov podniz teži ka a .

1.1.2.4. Tačka nagomilavanja podniza nekog niza je tačka nagomilavanja tog niza.

1.1.2.5. Ako je a tačka nagomilavanja nekog niza, postoji podniz toga niza koji konvergira ka a .

Sledeće dve teoreme odnose se na realne nizove.

1.1.2.6. Ako je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za dovoljno veliko n i ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = b$, tada je niz b_n ($n = 1, 2, \dots$) konvergentan i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Pri tome b može biti proizvoljan element skupa $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.7. 1° Ako je $a_n \leq b_n$ za dovoljno veliko n i ako postoje $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, tada je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

2° Ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$, tada je $a_n < b_n$ za dovoljno veliko n .

¹ Čitalac će lako dati precizno tumačenje ovim formulacijama.

1.1.2.8. Teorema o konvergenciji monotonih nizova. Svaki monoton i ograničen realni niz je konvergentan.

Pri tome, ako je niz (a_n) opadajući i (s gornje strane) ograničen, važi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n$, a ako je opadajući i (s donje strane) ograničen, imamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \geq 1} a_n$.

1.1.2.9. Dedekindova teorema. Neka su a_n i b_n ($n = 1, 2, \dots$) realni nizovi sa osobinama: $a_n \nearrow, b_n \searrow$ ($n = 1, 2, \dots$); $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) i $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Tada su oba ova niza konvergentna i njihova zajednička granična vrednost c zadovoljava dvostruku nejednakost $a_n \leq c \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$). U slučaju kad je $a_n \uparrow, b_n \downarrow$ ($n = 1, 2, \dots$) prethodna dvostruka nejednakost može se zameniti preciznijom: $a_n < c < b_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

1.1.2.10. Bolzano-Weierstrassova teorema. Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

1.1.2.11. Da bi brojni niz konvergirao, potrebno je i dovoljno da bude ograničen i da ima samo jednu tačku nagomilavanja.

1.1.2.12. Cauchyjev kriterijum konvergencije. Da bi niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergirao, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|a_p - a_q| < \varepsilon \quad \text{za} \quad p \geq q \geq n_0.$$

1.1.2.13. Ako je niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergentan, tada je konvergentan i niz $|a_n|$ ($n = 1, 2, \dots$) i važi $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right|$.

Egzistencija i konačnost limesa na levoj strani ne povlači egzistenciju limesa na desnoj strani.

1.1.2.13.1. Uz konvenciju $|\pm\infty| = +\infty$, za realne nizove važe oba tvrđenja prethodne teoreme u kojoj je konvergencija (tj. egzistencija konačnog limesa) zamenjena egzistencijom limesa u $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.14. Ako su nizovi a_n ($n = 1, 2, \dots$) i b_n ($n = 1, 2, \dots$) konvergentni, tada su konvergentni i nizovi $a_n + b_n, a_n - b_n, a_n b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) i tada je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ (1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n. \end{aligned}$$

Ako je još $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0$, tada je i niz a_n/b_n (n dovoljno veliko) konvergentan i važi jednakost

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}.$$

Egzistencija i konačnost bilo kog (posebno) od limesa na levim stranama jednakosti (1) i (2) ne povlači egzistenciju ni $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ni $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

1.1.2.14.1. Uz isključenje slučajeva kad se na desnoj strani javlja jedan od izraza

$$+\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad (\pm\infty) \cdot 0, \quad \frac{a}{0} (a \in \mathbf{R}_\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

sva tvrđenja teoreme 1.1.2.14, u kojoj je konvergencija zamenjena egzistencijom limesa u $\mathbf{R}_\infty$, važe i u $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.15. Ako je gornji limes realnog niza konačan, on je najveća tačka nagomilavanja (tj. maksimum skupa tačaka nagomilavanja) tog niza. Analogno tvrđenje važi za donji limes.

1.1.2.16. Da bi realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ imao limes u $\mathbf{R}_\infty$ (tj. konvergirao ili težio ka pozitivnoj ili negativnoj beskonačnosti), potrebno je i dovoljno da bude

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

1.1.2.17. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ realan niz. Ako je $a_n \leq A$ za dovoljno veliko n , tada je $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq A$; ako je $a_n \geq a$ za proizvoljno velike vrednosti n , tada je $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq a$; ako je $a_n \leq A$ za proizvoljno velike vrednosti n , tada je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq A$; ako je $a_n \geq a$ za dovoljno veliko n , tada je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq a$.

1.1.2.18. Da bi realan broj L bio gornji limes realnog niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ nejednakost $a_n < L + \varepsilon$ bude zadovoljena za dovoljno veliko n , a nejednakost $a_n > L - \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n . Da bi realan broj l bio donji limes istog niza, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ nejednakost $a_n > l - \varepsilon$ bude zadovoljena za dovoljno veliko n , a nejednakost $a_n < l + \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n .

1.1.2.19. Neka su a_n i b_n ($n \in \mathbf{N}$) realni nizovi. Ako je za n dovoljno veliko $a_n \leq b_n$, tada je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad \text{i} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(Tvrđenje 1° teoreme 1.1.2.7 je specijalan slučaj ove teoreme.)

1.1.2.20. 1° Neka su $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dva realna niza. Uz isključenje slučajeva kad se javljaju izrazi koji nemaju smisla, važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n. \end{aligned}$$

2° Ako je još $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ za dovoljno veliko n , tada, uz isto ograničenje kao napred, važe nejednakosti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n. \end{aligned}$$

1.1.2.21. Za svaki realan niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Ako je $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), tada je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n},$$

gde se, pored već usvojene konvencije $\frac{1}{+\infty} = 0$, uzima da je $\frac{1}{0} = +\infty$.

1.1.2.22. Stolzova teorema. Neka su $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dva realna niza. Ako $b_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) i $b_n \uparrow$ za n dovoljno veliko, tada je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Posledica 1. Specijalno, pod istim pretpostavkama, iz egzistencije limesa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

(u $\mathbb{R}_\infty$) sleduje egzistencija limesa $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ kao i jednakost

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Egzistencija leve strane poslednje jednakosti ne povlači egzistenciju desne strane iste jednakosti.

Stolzova teorema ima još sledeće važne posledice:

1.1.2.22.1. Cauchyeva teorema. Ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, tada je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a.$$

Posledica 1 Stolzove teoreme i Cauchyeva teorema važe i kada je a_n ($n = 1, 2, \dots$) kompleksan niz.

1.1.2.22.2. Ako je $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) i $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, tada je $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} = a$.

1.1.2.22.3. Ako je $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), tada je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Specijalno, pod istom pretpostavkom, iz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ izlazi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1/n} = a$.

1.1.2.23. Nekoliko partikularnih rezultata

$$1.1.2.23.1. \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow, \quad \beta_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = e \in (2, 3);$$

$$\alpha_n < e < \beta_n, \quad 0 < e - \alpha_n < \beta_n - \alpha_n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

Broj e , zajednički limes nizova α_n, β_n i $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ($n = 1, 2, \dots$), je transcendentan i ima decimalni razvoj $e = 2,71828\ 18284\ 59045 \dots$

$$1.1.2.23.2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma = 0,57721\ 56649\ 01532 \dots$$

Broj γ zove se Eulerova konstanta.

Primedba. Još nije ustanovljeno da li je γ racionalan ili iracionalan broj.

$$1.1.2.23.3. \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad (|a| < 1).$$

$$1.1.2.23.4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1).$$

$$1.1.2.23.5. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbf{C}).$$

$$1.1.2.23.6. \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1 \quad (a > 0).$$

$$1.1.2.23.7. \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1.$$

1.1.2.23.8. Stirlingova formula.¹ Navešćemo dva oblika ove formule.

Precizniji oblik:

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1; n \in \mathbf{N}).$$

Manje precizni oblik:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

¹ Detaljnije o Stirlingovoj formuli videti:

D. S. Mitrović, saradnik P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti*. Beograd 1970, str. 175–179.

1.1.3. FUNKCIONALNI NIZOVI

1.1.3.1. Pojam *funkcionalnog niza* $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), gde su $x \mapsto f_n(x)$ realne funkcije realne nezavisno promenljive sa istim domenom, definiše se na sličan način kao pojam brojnog niza.

Realne funkcije realne promenljive mogle bi se, u prethodnom tekstu i u nekim od sledećih rezultata, zameniti kompleksnim funkcijama kompleksne promenljive, ali izlaganje koje sleduje pretpostavlja da je reč o nizovima realnih funkcija realne promenljive.

1.1.3.2. Ako je konvergentan brojni niz koji se dobija od niza $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ stavljajući $x = x_0$, kaže se da *funkcionalni niz* $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ *konvergira u tački* $x = x_0$.

Skup svih tačaka u kojima niz $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ konvergira zove se *skup konvergencije* ovog funkcionalnog niza.

Ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ za svako $x \in E$ ($\subset \mathbf{R}$), funkcija $x \mapsto f(x)$ naziva se *graničnom funkcijom niza* $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ *na skupu* E .

1.1.3.3. Neka je E ($\subset \mathbf{R}$) skup na kome su sve funkcije $f_1, f_2, \dots$ definisane. Ako postoji nenegativan realan broj M takav da je $|f_n(x)| \leq M$ za svako $x \in E$ i za svako $n \in \mathbf{N}$, kaže se da je niz $f_1, f_2, \dots$ *uniformno ograničen na* E .

1.1.3.4. Neka su sve funkcije $f_1, f_2, \dots$ definisane na skupu E ($\subset \mathbf{R}$). Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$ i svako $x \in E$, kaže se da niz $f_n(x)$ *uniformno konvergira ka funkciji* $x \mapsto f(x)$ *na skupu* E .

Ako je skup E interval, onda se u 1.1.3.2, 1.1.3.3 i 1.1.3.4 na svim mestima reči »na E « mogu zameniti rečima »u (intervalu) E «.

1.1.3.4.1. Neka je $G_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ za dati skup E ($\subset \mathbf{R}$) i neka je

$$\Delta_n = \sup_{x \in E} G_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Da bi niz $f_n(x)$ na E uniformno konvergirao ka $f(x)$, potrebno je i dovoljno da bude $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = 0$.

Ako $x_n \in E$ ($n = 1, 2, \dots$) i $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x_n) > 0$, tada $f_n(x)$ ne konvergira uniformno ka $f(x)$ na E .

1.1.3.5. Cauchyev kriterijum za uniformnu konvergenciju. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ uniformno konvergira na skupu E ($\subset \mathbf{R}$) ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

za svako $p \geq q \geq n_0$ i za svako $x \in E$.

1.1.3.6. Ako su sve funkcije $x \mapsto f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) neprekidne na skupu E ($\subset \mathbf{R}$) i niz $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ na E uniformno konvergira ka $f(x)$, tada je i funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na skupu E .

1.1.3.7. Neka je $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) niz realnih funkcija koje su u Riemannovom smislu integrabilne u intervalu $[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$). Ako ovaj niz u

$[a, b]$ uniformno konvergira ka funkciji $x \mapsto f(x)$, tada je funkcija $x \mapsto f(x)$ u $[a, b]$ u Riemannovom smislu integrabilna i važi jednakost

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

1.1.3.7.1. Teorema Arzelà. Neka je svaka od funkcija $x \mapsto f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) u Riemannovom smislu integrabilna u intervalu $[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$). Ako je ovaj niz u $[a, b]$ uniformno ograničen i konvergira ka funkciji $x \mapsto f(x)$ koja je u $[a, b]$ integrabilna u Riemannovom smislu, tada važi jednakost (3).

1.1.3.8. Neka su sve funkcije $f_1, f_2, \dots$ definisane u intervalu (a, b) ($a < b$), i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

- 1° niz $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) konvergira za neko $x_0 \in (a, b)$;
- 2° sve funkcije $x \mapsto f'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) imaju konačne vrednosti za svako $x \in (a, b)$;
- 3° niz $f'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b) .

Tada:

- a) niz $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b) ;
- b) granična funkcija $x \mapsto f(x)$ niza $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ima izvod u (a, b) i
- c) $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$ za svako $x \in (a, b)$.

Primedba 1. Prethodna teorema često se navodi u (za dokaz) jednostavnijem obliku u kome se pretpostavka 2° zamenjuje pretpostavkom da su svi izvodi $x \mapsto f'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) neprekidni u intervalu (a, b) .

Primedba 2. Uz zamenu na svim mestima $E (\subset \mathbf{R})$ sa $E (\subset \mathbf{C})$, definicije 1.1.3.2, 1.1.3.3 i 1.1.3.4, kao i teoreme 1.1.3.4.1, 1.1.3.5 i 1.1.3.6, važe i za nizove kompleksnih funkcija kompleksne promenljive. Teorema 1.1.3.7 takođe ima svoj analogon za slučaj kompleksnih funkcionalnih nizova.