pa je

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\tan(x/2)} \cdot \frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C,$$

tj.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \log\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.1.5. Kako je $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, na osnovu prethodnog primera, smenom $x = t - \pi/2$, dobijamo

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x+\pi/2)}\,dx = \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \log\Big|\tan\frac{t}{2}\Big| + C,$$

tj.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log\Big|\tan\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big| + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.1.6. Smenom $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ $(0 < t < \pi/2)$ integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx \qquad (a < x < b)$$

postaje

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx &= 2\int dt = 2t + C \\ &= 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C,\end{aligned}$$

jer je

$$\begin{aligned}&x - a = (b-a)\sin^2 t, \quad b - x = (b-a)\cos^2 t, \\ &dx = (b-a)\sin 2t\,dt, \quad \tan^2 t = \frac{x-a}{b-x}. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Primer 2.1.7. Za određivanje integrala

$$\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx$$

uvedimo smenu $t = \arctan x$. Tada je $dt = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$, pa je

$$\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\,dx = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(\arctan x)^4 + C. \qquad \triangle$$

2.2. Metod parcijalne integracije

Teorema 2.2.1. *Neka su* $x \mapsto u(x)$ *i* $x \mapsto v(x)$ *diferencijabilne funkcije takve da* $x \mapsto u(x)v'(x)$ *i* $x \mapsto v(x)u'(x)$ *imaju primitivne funkcije. Tada je*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2.2.1}$$

Dokaz. Na osnovu učinjenih pretpostavki o diferencijabilnosti funkcija u i v, jednakosti

$$d(uv) = uv'dx + vu'dx = udv + vdu,$$

kao i na osnovu učinjene pretpostavke o egzistenciji primitivnih funkcija za uv' i vu', zaključujemo da važi (2.2.1). □

Na osnovu jednakosti (2.2.1) zasniva se *metod parcijalne integracije*. Za njegovu primenu na određivanje integrala $\int f(x)\,dx$ potrebno je podintegralni izraz $f(x)dx$ predstaviti u obliku

$$f(x)dx = u(x)v'(x)dx = udv.$$

Na taj način određivanje integrala $\int u\,dv$ svodimo na određivanje integrala $\int v\,du$, koji u izvesnim slučajevima može biti pogodniji za dalju integraciju.

Primer 2.2.1. 1° Stavljajući $u = \log x$, $dv = dx$ ($\Rightarrow du = (1/x)dx$, $v = x$) imamo

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int dx = x(\log x - 1) + C.$$

2° Integral $\int x^a \log x\,dx$ $(a \ne -1)$, takođe, određujemo primenom metoda parcijalne integracije stavljajući

$$u = \log x \qquad \text{i} \qquad dv = x^a dx.$$

Naime, imamo

$$\begin{aligned}\int x^a \log x\,dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \int \frac{x^a}{a+1}\,dx\\ &= \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right) + C. \qquad \triangle\end{aligned}$$

Primer 2.2.2. Ako u integralu

$$S = \int e^{ax}\sin bx\,dx \qquad (ab \ne 0)$$

uzmemo da je $u = e^{ax}$ i $dv = \sin bx\,dx$, pri čemu je, naravno, $du = ae^{ax}dx$ i $v = -(1/b)\cos bx$, dobijamo

$$S = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx. \tag{2.2.2}$$

Slično, stavljajući $u = e^{ax}$ i $dv = \cos bx\,dx$, imamo

$$K = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{b}\sin bx - \frac{a}{b}S. \tag{2.2.3}$$

Iz (2.2.2) i (2.2.3) sleduje

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C_1$$

i

$$K = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C_2,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. $\triangle$

Napomena 2.2.1. Integrali K i S se mogu dobiti integracijom kompleksne funkcije $x \mapsto e^{(a+ib)x}$. Naime, iz

$$K + iS = \int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + (C_1 + iC_2),$$

sleduje

$$K = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,\mathrm{Re}\big\{(a-ib)e^{ibx}\big\} + C_1$$

i

$$S = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,\mathrm{Im}\big\{(a-ib)e^{ibx}\big\} + C_2.$$

Primer 2.2.3. Za određivanje integrala

$$\int \arctan x\,dx$$

stavimo $u = \arctan x$ i $dv = dx$. Tada je $du = 1/(1+x^2)dx$ i $v = x$, pa imamo

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C,\end{aligned}$$

jer je (do na aditivnu konstantu)

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2). \quad \triangle$$

2.3. Metod rekurzivnih formula

U nekim slučajevima moguće je primeniti metod parcijalne integracije na određivanje integrala funkcija koje zavise od celobrojnog parametra, na taj način što se polazni integral I_n (n – celobrojni parametar) izražava rekurzivno pomoću integrala I_m ($m < n$).

Do sličnih rekurzivnih formula moguće je doći i na neki drugi način.

U svakom slučaju, ovaj način određivanja integrala svodi se na nalaženje rekurzivne formule oblika

$$I_n = \Phi(I_{n-1}, \dots, I_{n-k}). \tag{2.3.1}$$

Da bi se, na osnovu rekurzivne formule (2.3.1), odredio integral I_n, potrebno je znati uzastopnih k integrala oblika I_n. Naravno, ako se znaju integrali $I_0, \dots, I_{k-1}$ onda je moguće odrediti integrale I_n, za svako $n \geq k$.

Ovakav način određivanja integrala I_n poznat je kao *metod rekurzivnih formula*.

Ilustrovaćemo ovaj metod na nekoliko primera.

Primer 2.3.1. Posmatrajmo integral

$$I_n = \int x^a (\log x)^n \, dx \qquad (a \neq -1;\ n \in \mathbb{N}).$$

Ako stavimo $u = (\log x)^n$ i $dv = x^a dx$, imamo

$$du = \frac{n}{x}(\log x)^{n-1} dx \qquad \text{i} \qquad v = \frac{1}{a+1} x^{a+1}.$$

Tada je

$$I_n = \frac{x^{a+1}}{a+1}(\log x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\log x)^{n-1} \, dx,$$

tj.

$$I_n = \frac{x^{a+1}}{a+1}(\log x)^n - \frac{n}{a+1} I_{n-1}. \tag{2.3.2}$$

Formula (2.3.2) predstavlja rekurzivnu formulu za određivanje integrala I_n. Na ovaj način, određivanje integrala I_n sveli smo na određivanje integrala I_{n-1}. Uzastopnom primenom formule (2.3.2) moguće je određivanje integrala I_n svesti na određivanje integrala I_1, za koji smo u primeru 2.2.1 pokazali da je

$$I_1 = \frac{x^{a+1}}{a+1}\left(\log x - \frac{1}{a+1}\right) + C. \quad \triangle$$

Primer 2.3.2. Neka je

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\, dx \qquad (a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

Ako stavimo $u = 1/(x^2 + a^2)^n$ i $dv = dx$, imamo $du = -2nx/(x^2 + a^2)^{n+1} dx$ i $v = x$. Tada primenom metoda parcijalne integracije na I_n dobijamo

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\, dx.$$

Kako je

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\, dx = \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}}\, dx = I_n - a^2 I_{n+1},$$

imamo

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}),$$

tj.

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{2.3.3}$$

S obzirom da je

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

iz rekurzivne formule (2.3.3) moguće je odrediti I_n za $n = 2, 3, \dots$. Na primer, za $n = 2$ i $n = 3$ imamo

$$I_2 = \frac{1}{2a^3} \left(\frac{ax}{x^2 + a^2} + \arctan \frac{x}{a} \right) + C,$$

$$I_3 = \frac{1}{8a^5} \left(\frac{2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3ax}{x^2 + a^2} + 3 \arctan \frac{x}{a} \right) + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.3.3. Neka je

$$I_n = \int \tan^n x\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Za $n = 0$ i $n = 1$ imamo

$$I_0 = x + C \quad \text{i} \quad I_1 = -\log|\cos x| + C.$$

Neka je $n \geq 2$. Tada imamo

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \, d(\tan x) - I_{n-2}, \end{aligned}$$

tj.

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

Poslednja formula predstavlja rekurzivnu formulu za određivanje integrala I_n ($n \geq 2$). S obzirom da su poznati integrali I_0 i I_1, uzastopnom primenom ove formule moguće je dobiti I_n za svako $n \geq 2$.

Na primer,

$$\begin{aligned} I_4 = \int \tan^4 x \, dx &= \frac{1}{3} \tan^3 x - I_2 \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - (\tan x - I_0) \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C. \quad \triangle \end{aligned}$$

Primer 2.3.4. Ako je $n \geq 2$, za integrale

$$S_n = \int \sin^n x \, dx \quad \text{i} \quad K_n = \int \cos^n x \, dx$$

važe rekurzivne formule

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

i

$$K_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} K_{n-2}.$$

Dokažimo sada formulu za S_n. Ako stavimo $u = \sin^{n-1} x$ i $dv = \sin x dx$, imamo $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$ i $v = -\cos x$. Tada, primenom metoda parcijalne integracije, dobijamo

$$\begin{aligned} S_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx, \end{aligned}$$

tj.

$$nS_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)S_{n-2}.$$

Kako su $S_0 = x + C$, $S_1 = -\cos x + C$, $K_0 = x + C$, $K_1 = \sin x + C$, integrali S_n i K_n mogu se odrediti za svako $n \geq 2$. Tako imamo,

$$\begin{aligned} S_6 &= -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}S_4 \\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x + \frac{5}{6}\Big(-\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}S_2\Big) \\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x + \frac{5}{8}\Big(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}S_0\Big), \end{aligned}$$

tj.

$$S_6 = \cos x\Big(-\frac{1}{6}\sin^5 x - \frac{5}{24}\sin^3 x - \frac{5}{16}\sin x\Big) + \frac{5}{16}x + C. \qquad \triangle$$

Primer 2.3.5. Ako je

$$I_n = \int \frac{1}{(a + b\cos x)^n}\, dx \qquad (|a| \neq |b|;\ n \in \mathbb{N}),$$

važi rekurzivna formula

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(b^2 - a^2)}\left[\frac{b \sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} - (2n-3)aI_{n-1} + (n-2)I_{n-2}\right].$$

Za određivanje I_1 videti odeljak 3.3 (posebno primer 3.3.1). $\triangle$

2.4. Metod neodređenih koeficijenata

U slučajevima kada nam je unapred poznat opšti oblik primitivne funkcije moguće je za integraciju koristiti *metod neodređenih koeficijenata*. Ilustovaćemo ovaj metod na jednom jednostavnom primeru.

Posmatrajmo integral

$$\int e^{\lambda x} P_n(x)\, dx \qquad (\lambda \neq 0),$$

gde je $x \mapsto P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinom n-tog stepena. Nije teško uočiti da će, u ovom slučaju, primitivna funkcija imati oblik $e^{\lambda x}Q_n(x)$, gde je Q_n polinom, takođe, stepena n. Pretpostavimo da je

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k,$$

gde su b_k zasad neodređeni koeficijenti. Tada, diferenciranjem jednakosti

$$\int e^{\lambda x} P_n(x)\, dx = e^{\lambda x} Q_n(x) + C,$$

dobijamo

$$e^{\lambda x} P_n(x) = \lambda e^{\lambda x} Q_n(x) + e^{\lambda x} Q_n'(x),$$

tj.

$$\lambda Q_n(x) + Q_n'(x) = P_n(x).$$

Dakle, imamo

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

tj.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda b_k + (k+1) b_{k+1})\, x^k + \lambda b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Na osnovu metoda neodređenih koeficijenata, iz poslednje jednakosti sleduje

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n}{\lambda}, \\ b_k &= \frac{1}{\lambda}\left(a_k - (k+1) b_{k+1}\right) \quad (k = n-1, \dots, 1, 0). \end{aligned}$$

Primer 2.4.1. Pri određivanju integrala $\int e^{-2x}(x^3 - x)\, dx$ treba pretpostaviti da je

$$\int e^{-2x}(x^3 - x)\, dx = e^{-2x}\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3\right) + C.$$

Diferenciranjem ove jednakosti i skraćivanjem sa e^{-2x} dobijamo

$$x^3 - x = (b_1 - 2b_0) + (2b_2 - 2b_1)x + (3b_3 - 2b_2)x^2 - 2b_3 x^3,$$

odakle sleduje

$$b_3 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{3}{4}, \quad b_1 = -\frac{1}{4}, \quad b_0 = -\frac{1}{8}.$$

Dakle,

$$\int e^{-2x}(x^3 - x)\, dx = -\frac{1}{8} e^{-2x}\left(1 + 2x + 6x^2 + 4x^3\right) + C. \quad \triangle$$

3. INTEGRACIJA ELEMENTARNIH FUNKCIJA

3.1. Integracija racionalnih funkcija

Ovo poglavlje je posvećeno integraciji nekih klasa elementarnih funkcija koje se često javljaju u primenama. To su, pre svega, racionalne funkcije, a zatim i neke jednostavnije klase iracionalnih funkcija, kao i neke trigonometrijske funkcije. U ovom odeljku razmatraćemo samo klasu racionalnih funkcija.

Neka su P i Q polinomi sa realnim koeficijentima, takvi da je stepen polinoma P manji od stepena polinoma Q, tj. $\operatorname{dg} P < \operatorname{dg} Q$. Kao što znamo, takva racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ naziva se prava racionalna funkcija (videti [15, str. 292]).

Kako se opšta racionalna funkcija, za koju je $\operatorname{dg} P \geq \operatorname{dg} Q$, uvek može predstaviti kao zbir jednog polinoma i jedne prave racionalne funkcije, to se integracija opšte racionalne funkcije svodi na integraciju polinoma i integraciju prave racionalne funkcije.

Primer 3.1.1. Posmatrajmo integral

$$J = \int \frac{x^6 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x - 7}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx.$$

Deljenjem brojioca imeniocem u podintegralnoj funkciji $x \mapsto R(x)$ dobijamo (videti [15, str. 292, primer 5.1.1)

$$R(x) = x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} J &= \int \left(x^2 - 2 + \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x + \int \frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx. \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{x^3 + x^2 + 4x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{4 + x^2} \tag{3.1.1}$$

imamo

$$J = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C. \quad \triangle$$

Iz ovog primera može se videti da je za integraciju prave racionalne funkcije $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ veoma važno njeno rastavljanje na parcijalne razlomke (formula (3.1.1)). Opšti slučaj rastavljanja prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke razmatran je u [15, str. 293–298].

Neka su P i Q polinomi sa realnim koeficijentima, takvi da je stepen polinoma P manji od stepena polinoma Q, tj. $\operatorname{dg} P < \operatorname{dg} Q$. Pretpostavimo da polinom Q ima realne nule $a_1, \dots, a_m$, sa redom višestrukosti $r_1, \dots, r_m$, i parove konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_l \pm i\beta_l$, sa redom višestrukosti $s_1, \dots, s_l$. Naravno, mora biti

$$\sum_{k=1}^{m} r_k + 2\sum_{k=1}^{l} s_k = \operatorname{dg} Q.$$

Parovima konjugovano-kompleksnih nula $\alpha_k \pm i\beta_k$ odgovaraju kvadratni faktori $x^2 + p_k x + q_k$ ($p_k = -2\alpha_k,\ q_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$) odgovarajuće višestrukosti s_k.

Kao što je poznato, polinom Q može se faktorisati u obliku

$$Q(x) = A\prod_{k=1}^{m}(x-a_k)^{r_k}\prod_{k=1}^{l}(x^2+p_k x+q_k)^{s_k}, \tag{3.1.2}$$

gde je A koeficijent uz najviši stepen u polinomu Q. Ovo omogućava da se prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ rastavi na parcijalne razlomke čiji oblik zavisi od oblika faktora u (3.1.2). Tako imamo

$$R(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{r_k}\frac{A_{kn}}{(x-a_k)^n} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{n=1}^{s_k}\frac{M_{kn}x+N_{kn}}{(x^2+p_k x+q_k)^n}, \tag{3.1.3}$$

gde se nepoznati koeficijenti A_{kn}, M_{kn}, N_{kn}, određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Pretpostavimo da je prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = P(x)/Q(x)$ definisana za svako $x \in I$, tj. da polinom Q nema nula u intervalu I. Na osnovu (3.1.3), integracija prave racionalne funkcije zahteva nalaženje integrala oblika

$$J_n = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx \qquad \text{i} \qquad K_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$$

Integral J_n je jednostavan i za njega važi

$$J_1 = A \log |x-a| + C,$$
$$J_n = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n > 1).$$

Razmotrićemo sada integral K_n. Kako je

$$x^2 + px + q = \Big(x + \frac{p}{2}\Big)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

uvođenjem nove promenljive $t = x + p/2$ i stavljanjem $a^2 = q - p^2/4 > 0$, nalazimo

$$\begin{aligned} K_n &= \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx \\ &= M \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^n}\, dt + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n}\, dt. \end{aligned}$$

Za $n = 1$ imamo

$$K_1 = \frac{M}{2} \log(t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \arctan \frac{t}{a} + C,$$

tj.

$$K_1 = \frac{M}{2} \log(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{2a} \arctan \frac{2x + p}{2a} + C, \tag{3.1.4}$$

gde je $a = (q - p^2/4)^{1/2}$.

U slučaju kada je $n > 1$ imamo

$$K_n = \frac{-M}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2N - Mp}{2} I_n, \tag{3.1.5}$$

gde je integral I_n određen u primeru 2.3.2.

Primer 3.1.2. U cilju određivanja integrala

$$\int \frac{1}{1 + x^3}\, dx,$$