Primer 2.2.6. Funkcija

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & (-1 < x \leq 1)\,, \\ \sqrt{x} & (1 \leq x < +\infty), \end{cases}$$

nije diferencijabilna u tački $x = 1$, jer je

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3 \qquad \text{i} \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Dakle, $f'(1)$ ne postoji. Nije teško zaključiti da je $f'(0) = 0$ i da za ostale vrednosti za x važi nejednakost $f'(x) > 0$. Prema tome, neprekidna funkcija f je rastuća u intervalu $(-1, +\infty)$. $\triangle$

Važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.2.3. *Neka je $x \mapsto f(x)$ $(a < x < b)$ diferencijabilna funkcija i neka je $\alpha \in (a, b)$. Ako je $f'(\alpha) > 0$, tada postoji okolina $U(\alpha, \delta)$ u kojoj je funkcija f rastuća. Ako je $f'(\alpha) < 0$, tada postoji okolina $U(\alpha, \delta)$ u kojoj je funkcija f opadajuća.*

Zbog toga se često kaže da ako je $f'(\alpha) > 0$ da funkcija f raste u tački $x = \alpha$. Isto tako, ako je $f'(\alpha) < 0$ kaže se da u tački $x = \alpha$ funkcija f opada.

Primer 2.2.7. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ u tački $x = -2$ opada, jer je $f'(-2) = -4 < 0$, a u tački $x = 1$ raste, jer je $f'(1) = 2 > 0$. $\triangle$

U stvari, funkcija f raste u tački $x = \alpha$, ako istovremeno: za svako $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ važi nejednakost $f(x) < f(\alpha)$ i ako za svako $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ važi $f(\alpha) < f(x)$.

Isto tako, funkcija f opada u tački $x = \alpha$, ako istovremeno: za svako $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ važi nejednakost $f(x) > f(\alpha)$ i ako za svako $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ važi $f(\alpha) > f(x)$.

Kao što vidimo, činjenica da neka funkcija f raste, ili opada, u tački α predstavlaja, u stvari, jednu lokalnu osobinu te funkcije u tački $x = \alpha$.

Nije teško zaključiti da ako je neka funkcija rastuća (opadajuća) u nekom intervalu, da ona raste (opada) u svakoj tački tog intervala, ali, i obrnuto, ako funkcija raste (opada) u svakoj tački nekog intervala, tada je ta funkcija rastuća (opadajuća) u celom tom intervalu.

Primer 2.2.8. Funkcija $x \mapsto g(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ raste u svakoj tački, jer za njen izvod g' važi nejednakost $g'(x) = e^x > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. $\triangle$

2.3. Lokalni ekstremumi funkcija

Još u prvoj glavi (videti odeljak 1.1) napomenuli smo da se kaže da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ ima *minimum*, u oznaci $\min\limits_{x\in D} f(x)$, ako postoji $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ i ako taj infimum pripada skupu vrednosti funkcije f, tj. ako $\inf\limits_{x\in D} f(x) \in f(D)$. To, u stvari, znači da funkcija $x \mapsto f(x)$ ima minimum ako u skupu D postoji tačka $x = \alpha$, takva da je

$$f(\alpha) = \inf_{x\in D} f(x) = \inf(f(D)).$$

Isto tako, kaže se da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ ima *maksimum*, u oznaci $\max\limits_{x\in D} f(x)$, ako postoji $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ i ako taj supremum pripada skupu vrednosti funkcije f, tj. ako $\sup\limits_{x\in D} f(x) \in f(D)$. Dakle, to znači da funkcija $x \mapsto f(x)$ ima maksimum ako u skupu D postoji tačka $x = \beta$, takva da je

$$f(\beta) = \sup_{x\in D} f(x) = \sup(f(D)).$$

Kao što vidimo, ovako definisani minimum je zaista najmanja, a maksimum najveća vrednost funkcije $x \mapsto f(x)$. Zbog toga se, ponekad, za tako definisani minimum kaže da je to *apsolutni minimum*, a za maksimum da je *apsolutni maksimum* funkcije f.

Napomenimo da je uvek $f(D) \subseteq \big[\inf\limits_{x\in D} f(x), \sup\limits_{x\in D} f(x)\big]$. Samo se po sebi razume: ako je $f(D)$ interval, polusegment (poluinterval) ili segment, onda su vrednosti $\inf\limits_{x\in D} f(x)$ i $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ njegovi krajevi.

Sledećim dvema definicijama uvešćemo neke nove pojmove.

Definicija 2.3.1. Za tačku $a \in (\alpha, \beta)$ kažemo da je *tačka minimuma* funkcije $x \mapsto f(x)$ $(x \in (\alpha, \beta))$ ako postoji $\delta > 0$ takvo da je $f(x) \geq f(a)$ za svako $x \in U(a, \delta)$. U tom slučaju, za funkciju f kažemo da u tački a ima *minimum* $f(a)$.

Definicija 2.3.2. Za tačku $a \in (\alpha, \beta)$ kažemo da je *tačka maksimuma* funkcije $x \mapsto f(x)$ $(x \in (\alpha, \beta))$ ako postoji $\delta > 0$ takvo da je $f(x) \leq f(a)$ za svako $x \in U(a, \delta)$. U tom slučaju, za funkciju f kažemo da u tački a ima *maksimum* $f(a)$.

Nije teško zaključiti da ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ rastuća, da je tada $f(a)$ minimum, a $f(b)$ maksimum funkcije f na segmentu $[a, b]$. I obrnuto, ako je f opadajuća funkcija, tada je $f(a)$ maksimum i $f(b)$ minimum funkcije $f(x)$ za $x \in [a,b]$.

Za najmanju i najveću vrednost neke funkcije, tj. za njen minimum i njen maksimum, često se kaže da su to njene *ekstremne vrednosti* ili da su to njeni *ekstremumi*.

Kako je svaka diferencijabilna funkcija istovremeno i neprekidna, na osnovu druge Weierstrassove teoreme (videti: glava III, teorema 2.3.2) neposredno sleduje da svaka na segmentu $[a,b]$ diferencijabilna funkcija ima i svoj minimum i svoj maksimum.

Dokazaćemo sada neka tvrđenja koja se odnose na ekstremne vrednosti funkcija.

Teorema 2.3.1. *Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ u tački $a \in (\alpha, \beta)$ ima ekstremum, tada ili funkcija f u toj tački nije diferencijabilna ili je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Očigledno, u skladu sa definicijama 2.3.1 i 2.3.2, činjenica da u tački $a \in (\alpha, \beta)$ funkcija f ima ekstremum znači da postoji okolina $U(a, \delta) \subset (\alpha, \beta)$ takva da je $f(a) \geq f(x)$ ili $f(a) \leq f(x)$, za $x \in U(a, \delta)$. Prema tome, u tački a funkcija f dostiže svoju najmanju ili svoju najveću vrednost. Stoga, na osnovu Fermatove teoreme (videti teoremu 1.11.1), zaključujemo da ako postoji $f'(a)$ važi jednakost $f'(a) = 0$, čime je dokazan jedan deo tvrđenja teoreme.

Naravno, ako $f'(a)$ ne postoji, funkcija f u tački a nije diferencijabilna.

Ovim je teorema dokazana. $\square$

Primer 2.3.1. Očigledno, funkcije $x \mapsto f(x) = x^2$ i $x \mapsto g(x) = |x|$ u tački $x = 0$ dostižu svoje minimalne vrednosti. Pri tome, za funkciju f važi $f'(0) = 0$, a fukcija g nije diferencijabilna u tački $x = 0$. $\triangle$

Napomenimo da jednakost $f'(a) = 0$ ne znači da diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ ima ekstremum u tački $x = a$. Na primer, funkcija $x \mapsto f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ ima u tački $x = 0$ izvod jednak nuli, ali u toj tački nema ekstremum.

Teoremom 2.3.1 se, prema tome, utvrđuje potreban uslov da funkcija $x \mapsto f(x)$ u tački $x = a$ ima ekstremum.

Međutim, važi i sledeće tvrđenje:

Teorema 2.3.2. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna u tački $x = a$ i neka je diferencijabilna u okolini $U(a, \delta) \subset (\alpha, \beta)$, sem možda u tački a. Ako su vrednosti $f'(x)$, za svako $x \in U(a-, \delta)$ i za svako $x \in U(a+, \delta)$, različitog znaka, funkcija f u tački $x = a$ ima ekstremum.*

Dokaz. Razlikovaćemo dva slučaja: slučaj kada je

$$f'(x) > 0 \quad (a - \delta < x < a) \qquad \text{i} \qquad f'(x) < 0 \quad (a < x < a + \delta), \tag{2.3.1}$$

a zatim, slučaj kada je

$$f'(x) < 0 \quad (a - \delta < x < a) \qquad \text{i} \qquad f'(x) > 0 \quad (a < x < a + \delta). \tag{2.3.2}$$

Razmotrimo prvi slučaj. Neka, dakle, za $x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ važe nejednakosti (2.3.1). Tada, na osnovu Lagrangeove formule

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) \qquad (a < \xi < x \quad \text{ili} \quad x < \xi < a)$$

zaključujemo da je razlika $f(x) - f(a)$ uvek negativna, tj. uvek važi nejednakost $f(x) < f(a)$, jer su, zbog (2.3.1), $f'(\xi)$ i $x - a$ različitog znaka. Vrednost $f(a)$ je, prema tome, najveća vrednost funkcije f za $x \in U(a, \delta)$, što znači da u tački $x = a$ funkcija f dostiže svoj maksimum.

Na sličan način dokazuje se da u drugom slučaju, tj. u slučaju da važi (2.3.2), funkcija f u tački $x = a$ dostiže svoj minimum. $\square$

Primer 2.3.2. Neka je $x \mapsto f(x) = \sin x \ \ (0 \le x \le 2\pi)$.

1° Kako je $f'(x) = \cos x$ i

$$\cos x > 0 \quad \Big(\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}\Big) \qquad \text{i} \qquad \cos x < 0 \quad \Big(\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \delta\Big),$$

na osnovu teoreme 2.3.2 zaključujemo da u tački $x = \pi/2$ funkcija f dostiže svoj maksimum $f(\pi/2) = 1$.

2° Isto tako, funkcija f, zbog

$$\cos x < 0 \quad \Big(\frac{3\pi}{2} - \delta < x < \frac{3\pi}{2}\Big) \qquad \text{i} \qquad \cos x > 0 \quad \Big(\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + \delta\Big),$$

prema teoremi 2.3.2, u tački $x = 3\pi/2$ dostiže svoj minimum $f(3\pi/2) = -1$. $\triangle$

Primer 2.3.3. Kao što smo videli funkcija $x \mapsto |x|$ u tački $x = 0$ ima minimum, iako u njoj nije diferencijabilna, što je u skladu sa teoremom 2.3.2. $\triangle$

Napomenimo da su uslovi teoreme 2.3.2 samo dovoljni uslovi, ali ne i potrebni da bi funkcija f imala ekstremum u tački $x = a$. Naime, ako funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in (\alpha, \beta))$ ima u tački $x = a$ ekstremum, na primer minimum, to ne znači da mora postojati okolina $U(a, \delta)$ takva da je $f'(x) < 0$ kada $x \in \overset{\circ}{U}(a-, \delta)$ i $f'(x) > 0$ ako $x \in \overset{\circ}{U}(a+, \delta)$.

Ilustrovaćemo ovaj zaključak sledećim primerom:

Primer 2.3.4. Posmatrajmo funkciju

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Neka je $x \neq 0$. Tada iz nejednakosti

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1,$$

jedno za drugim dobijamo

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \qquad \text{i} \qquad x^2 \leq 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} \leq 3x^2,$$

odakle, zbog $f(0) = 0$, sleduje dvostruka nejednakost

$$x^2 \leq f(x) \leq 3x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.3.3}$$

Kako je $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} x^2 = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} 3x^2 = 0$, iz (2.3.3) neposredno zaključujemo da funkcija f, u tački $x = 0$, ima minimum $f(0) = 0$.

Međutim, ni u jednoj od okolina $\overset{\circ}{U}(0-, \delta)$ ili $\overset{\circ}{U}(0+, \delta)$ funkcija

$$x \mapsto f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

nema stalni znak. Šta više, ona ga u svakoj od njih beskonačno puta menja. $\triangle$

Teorema 2.3.3. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna u tački $x = a$ i neka je $f'(a) = 0$ i $f''(a) \neq 0$. Tada funkcija f u tački a dostiže svoj maksimum ako je $f''(a) < 0$, a minimum ako je $f''(a) > 0$.*

Dokaz. Pod navedenim uslovima, za funkciju f važi Taylorova formula

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + R_2(x) \qquad (x \to a),$$

tj. jednakost

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big) \qquad (x \to a).$$

Kako je

$$\lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \lim_{x\to a} \frac{R_2(x)}{\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2} = 0,$$

zaključujemo da postoji okolina $U(a,\delta)$ tačke $x=a$ u kojoj važi

$$\left| \frac{R_2(x)}{\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2} \right| < \frac{1}{2},$$

što, zapravo, znači da važi nejednakost

$$|R_2(x)| < \frac{1}{2} \left| \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \right|.$$

Prema tome, u okolini $U(a,\delta)$, razlika $f(x)-f(a)$, tj. zbir

$$\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + R_2(x),$$

ima isti znak kao i izraz $\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$, tj. kao izvod $f''(a)$.

Dakle, ako je $f''(a) > 0$, za $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ važi nejednakost $f(x)-f(a) > 0$, tj. funkcija f u tački $x=a$ dostiže svoj minimum.

Ali, ako je $f''(a) < 0$, za $x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ važi nejednakost $f(x)-f(a) < 0$, tj. funkcija f u tački $x=a$ dostiže svoj maksimum. $\square$

Primer 2.3.5. Neka je $x \mapsto f(x) = x^2$ $(-1 < x < 1)$. Kako je $f'(x) = 2x$ i $f''(x) = 2$, zbog $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 2 > 0$, na osnovu teoreme 2.3.3, zaključujemo da je $f(0) = 0$ minimum funkcije f.

Ako je $x \mapsto g(x) = \sin x$ $(0 < x < \pi)$, tada je, isto tako na osnovu teoreme 2.3.3, $g(\pi/2) = \sin \pi/2 = 1$ maksimum funkcije g, jer iz $g'(x) = \cos x$ i $g''(x) = -\sin x$ sleduje $g'(\pi/2) = 0$ i $g''(\pi/2) = -1 < 0$. $\triangle$

Na sličan način može se dokazati sledeće opštije tvrđenje:

Teorema 2.3.4. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ n puta diferencijabilna u tački $x=a$ i neka je*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad i \qquad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 2).$$

Tada, ako je n paran broj, funkcija f u tački a ima ekstremum, i to: minimum ako je $f^{(n)}(a) > 0$, a maksimum ako je $f^{(n)}(a) < 0$.

Ako je n neparan broj, funkcija f u tački a raste ako je $f^{(n)}(a) > 0$, a opada ako je $f^{(n)}(a) < 0$.

Primer 2.3.6. 1° Neka je $f(x) = x^4 \quad (-1 < x < 1)$. Na osnovu izvoda

$$\mathcal{D}f(x) = 4x^3, \quad \mathcal{D}^2 f(x) = 12x^2, \quad \mathcal{D}^3 f(x) = 24x, \quad \mathcal{D}^4 f(x) = 24,$$

zaključujemo da funkcija f, u tački $x = 0$, ima minimum $f(0) = 0$.

2° Ako je $g(x) = x + \sin x \quad (\pi/2 < x < 3\pi/2)$, tada je

$$g'(x) = 1 + \cos x, \qquad g''(x) = -\sin x, \qquad g'''(x) = -\cos x,$$

odakle sleduje

$$g'(\pi) = g''(\pi) = 0 \qquad \text{i} \qquad g'''(\pi) = 1 > 0.$$

Prema tome, na osnovu teoreme 2.3.4, zaključujemo da funkcija g u tački $x = \pi$ nema ekstremum. Ona u toj tački raste. $\triangle$

Na kraju, napomenimo da se, u skladu sa ovim razmatranjima, konvencijom uzima da funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in D)$ u svakoj tački $a \in D$ za koju je $f(a)$ izolovana tačka skupa $f(D)$, dostiže svoj ekstremum. Naravno, u konkretnim slučajevima, prirodu tog ekstremuma nije teško utvrditi. Zanimljivo je da se u izolovanoj tački a skupa D, za koju je $f(a)$ izolovana tačka skupa $f(D)$, takođe konvencijom uzima da funkcija f istovremeno dostiže i svoj minimum i svoj maksimum.

Primer 2.3.7. Funkcije

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0), \\ -1 & (x = 0) \end{cases}$$

u tački $x = 0$ imaju, respektivno, maksimum $f(0) = 1$ i minimum $g(0) = -1$. $\triangle$

Primer 2.3.8. Kako oblast definisanosti funkcije $x \mapsto f(x) = x(\sqrt{x-1} + 1)$ čini unija skupova $\{0\}$ i $[1, +\infty)$, tj. skup $D = \{0\} \cup [1, +\infty)$, tačka $x = 0$ je izolovana tačka tog skupa. Kao što smo naglasili, konvencijom se uzima da u tački $x = 0$ funkcija f dostiže i svoju minimalnu i svoju maksimalnu vrednost

$$\min f(x) = \max f(x) = f(0) = 0.$$

Inače, funkcija f u tački $x = 1$ takođe dostiže svoju minimalnu vrednost

$$\min f(x) = f(1) = 0,$$

jer je rastuća za $x \in [1, +\infty)$. $\triangle$

2.4. Konveksnost i prevojne tačke

U odeljku 1.6 (glava I) dokazali smo nekoliko teorema koje su se odnosile na konveksne funkcije. Između ostalog (videti teoremu 1.6.2), dokazali smo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ konveksna na (a, b) ako i samo ako je

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geq 0, \tag{2.4.1}$$

za svaku trojku vrednosti $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ za koju je $x_1 < x < x_2$. Ovde ćemo dokazati nekoliko tvrđenja koja se odnose na konveksnost diferencijabilnih funkcija.

Teorema 2.4.1. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konveksna (strogo konveksna) na (a, b) ako i samo ako je njena izvodna funkcija f' neopadajuća (rastuća) na (a, b).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija na (a, b), tj. neka za svako x_1, x, x_2 $(a < x_1 < x < x_2 < b)$ važi nejednakost (2.4.1).

Kako je $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, nejednakost (2.4.1) je ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (x_1 < x < x_2), \tag{2.4.2}$$

odakle, jedno za drugim, dobijamo

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

i

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Prema tome, za svaki par vrednosti $x_1, x_2 \in (a, b)$, za koji je $x_1 < x_2$, važi nejednakost $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, što kazuje da je f' neopadajuća funkcija na (a, b). U slučaju stroge konveksnosti funkcije f, u (2.4.2) važi stroga nejednakost, odakle, na osnovu Lagrangeove teoreme, sleduje

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

gde je $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Prema tome, za svako $x_1 < x_2$ postoje ξ_1 i ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$ za koje je

$$f'(x_1) \le f'(\xi_1), \qquad f'(\xi_1) < f'(\xi_2), \qquad f'(\xi_2) \le f'(x_2),$$

tj. $f'(x_1) < f'(x_2)$. Dakle, ako je f strogo konveksna funkcija na (a,b), tada je f' rastuća funkcija na (a,b).

Neka je sada funkcija f' neopadajuća na (a,b). Na osnovu Lagrangeove formule, za $a < x_1 < x < x_2 < b$ imamo

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \quad \text{i} \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2), \tag{2.4.3}$$

gde je $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$.

Kako je f' neopadajuća funkcija, važi nejednakost $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, odakle, obzirom na (2.4.3), zaključujemo da važi nejednakost (2.4.2), pa, prema tome, i njoj ekvivalentna nejednakost (2.4.1). Dakle, funkcija f je konveksna.

Ako je f' rastuća funkcija, stroga konveksnost funkcije f, tj. stroga nejednakost u (2.4.1), sleduje iz nejednakosti $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. $\square$

Primer 2.4.1. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ je konveksna, jer je funkcija $x \mapsto f'(x) = 4x^3$ neopadajuća.

Za funkciju $x \mapsto f(x) = e^x$ važi $f'(x) = e^x$. Kako je f' rastuća, funkcija f je strogo konveksna. $\triangle$

Na sličan način može se zaključiti da važi i dualno tvrđenje:

Teorema 2.4.2. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konkavna (strogo konkavna) na (a,b) ako i samo ako je njena izvodna funkcija f' nerastuća (opadajuća) na (a,b).*

Primer 2.4.2. 1° Funkcija $x \mapsto f(x) = 4x - x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ je konkavna na intervalu $(-\infty,+\infty)$ jer je $x \mapsto f'(x) = 4(1-x^3)$ nerastuća funkcija za $x \in (-\infty,+\infty)$.

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = \sin x$ $(0 < x < \pi)$ je strogo konkavna na $(0,\pi)$ jer je $x \mapsto f'(x) = \cos x$ $(0 < x < \pi)$ opadajuća funkcija. $\triangle$

Teorema 2.4.3. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konveksna na (a,b) ako i samo ako važi nejednakost*

$$f(x) - f(\alpha) \ge f'(\alpha)(x-\alpha) \qquad (x,\alpha \in (a,b)). \tag{2.4.4}$$

Funkcija je strogo konveksna na ako i samo ako važi stroga nejednakost u (2.4.4).

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija na (a, b). Kako je

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\xi)(x - \alpha) \qquad (x < \xi < \alpha \ \text{ ili } \ \alpha < \xi < x)$$

nejednakost (2.4.4) postaje

$$(f'(\xi) - f'(\alpha))\,(x - \alpha) \geq 0 \qquad (x < \xi < \alpha \ \text{ ili } \ \alpha < \xi < x),$$

i ona je tačna jer je, na osnovu teoreme 2.4.1, funkcija f' neopadajuća funkcija na (a, b). Dakle, pod pretpostavkom da je f konveksna funkcija, dokazali smo da važi nejednakost (2.4.4).

Pretpostavimo sada da važi nejednakost (2.4.4), tj.

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq f'(\alpha) \quad (x < \alpha) \qquad \text{i} \qquad \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq f'(\alpha) \quad (\alpha < x),$$

ili, što je isto,

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'(x) \quad (x_1 < x) \quad \text{i} \quad f'(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (x < x_2).$$

Iz ovih nejednakosti zaključujemo da je

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (x_1 < x < x_2),$$

odakle, za proizvoljne vrednosti $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ za koje je $a < x_1 < x < x_2 < b$, sleduje da je funkcija f konveksna.

Stroga nejednakost u (2.4.4) je potreban i dovoljan uslov za strogu konveksnost funkcije f na (a, b). $\square$

Napomena 2.4.1. Tvrđenje teoreme 2.4.3 ima sledeću geometrijsku interpretaciju: Ako je f konveksna (ili: strogo konveksna) funkcija na (a, b), tada za krivu $y = f(x)$ $(x \in (a, b))$ i njenu tangentu $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$ u proizvoljnoj tački $\alpha \in (a, b)$ važi da za svako x iz intervala (a, b) ordinate krive nisu manje (ili: veće su) od ordinata tangente. I obrnuto, ako ova osobina važi za krivu čija je jednačina $y = f(x)$ i svaku njenu tangentu, funkcija f je konveksna (ili: strogo konveksna) funkcija.

Naravno, važi i tvrđenje koje je dualno teoremi 2.4.3:

Teorema 2.4.4. *Diferencijabilna funkcija $x \mapsto f(x)$ je konkavna na (a, b) ako i samo ako važi nejednakost*

$$f(x) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(x - \alpha) \qquad (x, \alpha \in (a, b)). \tag{2.4.5}$$

Funkcija je strogo konkavna ako i samo ako važi stroga nejednakost u (2.4.5).

Napomena 2.4.2. Tvrđenju teoreme 2.4.4 može se dati slična geometrijska interpretacija kao što je to učinjeno u napomeni 2.4.1 za konveksne funkcije. U stvari, može se zaključiti da luk grafika svake konveksne ili konkavne funkcije u okolini neke njene tačke M čitav leži sa jedne strane njene tangente u toj tački M.

Dokazaćemo sada jedno važno tvrđenje koje se u praksi veoma često koristi.

Teorema 2.4.5. *Neka je $x \mapsto f(x)$ dvaput diferencijabilna funkcija na (a, b). Funkcija f je konveksna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$, za svako $x \in (a, b)$, a konkavna ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$, za svako $x \in (a, b)$.*

Dokaz. Ako je f konveksna funkcija na (a, b), tada je funkcija $x \mapsto f'(x)$ $(a < x < b)$, na osnovu teoreme 2.4.1, neopadajuća, što na osnovu teoreme 2.2.1 znači da je $f''(x) \geq 0$ za $x \in (a, b)$.

Obrnuto, ako je $f''(x) \geq 0$, na osnovu teoreme 2.2.1 zaključujemo da je funkcija $x \mapsto f'(x)$ $(a < x < b)$ neopadajuća, što prema teoremi 2.4.1 znači da je funkcija f konveksna na (a, b).

Sličan dokaz se može dati i za konkavne funkcije. $\square$

Napomena 2.4.3. U slučaju stroge konveksnosti (stroge konkavnosti) drugi izvod $f''(x)$ treba biti pozitivan (negativan).

Primer 2.4.3. 1° Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = x^4 - 4x$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, na osnovu teoreme 2.4.5 zaključujemo da je funkcija f konveksna na intervalu $(-\infty, +\infty)$.

2° Funkcija $x \mapsto f(x) = -x^2 - 2\cos x$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ ima drugi izvod f'', određen sa $f''(x) = 2(\cos x - 1)$, za koji važi nejednakost $f''(x) \leq 0$, što na osnovu teoreme 2.4.5 znači da je f konkavna funkcija. $\triangle$

Primer 2.4.4. 1° Neka je $x \mapsto f(x) = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(x \in \mathbb{R})$. Kako je $f''(x) = \cosh x > 0$ za svako realno x, na osnovu teoreme 2.4.6 imamamo da je f strogo konveksna na $(-\infty, +\infty)$.

2° Neka je $x \mapsto g(x) = \log x$ $(x > 0)$. Kako je $f''(x) = -1/(x^2) < 0$, na osnovu teoreme 2.4.6 zaključujemo da je funkcija g strogo konkavna na $(0, +\infty)$. $\triangle$