Napomena 1.6.2. Nije teško zaključiti da je moguće odrediti izvod implicitno definisane funkcije $x \mapsto y = f(x)$ i u slučaju kada je ona zadata jednakošću

$$F\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y)\Big) = 0,$$

ako su funkcije $x \mapsto g_i(x)$ i $x \mapsto h_i(x)$ diferencijabilne i ako je ispunjen uslov

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i'(y) \neq 0.$$

Primer 1.6.7. Ako je jednakošću $F(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x = 0$ definisana diferencijabilna funkcija $x \mapsto y = f(x)$, primenom teoreme 1.6.1 dobijamo

$$y'(e^x \sin y - e^y \sin x) = e^x \cos y + e^y \cos x,$$

tj.

$$y' = f'(x) = \frac{e^x \cos y + e^y \cos x}{e^x \sin y - e^y \sin x}. \qquad \triangle$$

1.7. Tablice izvoda elementarnih funkcija

Na osnovu primera iz odeljaka 1.4, 1.5 i 1.6, moguće je sačiniti tabelarni pregled izvoda osnovnih elementarnih funkcija.

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
$y = \log x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$$
\begin{array}{ll}
y = \arcsin x & y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y = \arccos x & y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y = \arctan x & y' = \dfrac{1}{1+x^2} \\
y = \operatorname{arccot} x & y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \\
y = \sinh x & y' = \cosh x \\
y = \cosh x & y' = \sinh x \\
y = \tanh x & y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} \\
y = \coth x & y' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}
\end{array}
$$

Primetimo da su isvodi ovih elementarnih funkcija, takođe, elementarne funkcije.

1.8. Izvod funkcija u parametarskom obliku

Neka je $T = [\alpha, \beta]$ i neka su funkcije φ i ψ definisane pomoću

$$x = \varphi(t) \qquad \text{i} \qquad y = \psi(t) \quad (t \in T).$$

Kao što smo videli (odeljak 1.8, glava I), ako je funkcija φ strogo monotona za $t \in T$, tada je pomoću φ i ψ definisana funkcija

$$x \mapsto y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \qquad (x \in \varphi(T)).$$

Isto tako, ako je za $t \in T$ funkcija ψ strogo monotona, funkcije ψ i φ određuju funkciju

$$y \mapsto x = g(y) = \varphi(\psi^{-1}(y)) \qquad (y \in \psi(T)).$$

Posmatrajmo slučaj kada su pomoću funkcija φ i ψ definisane funkcija f ili funkcija g. U svakom slučaju, ako bi bilo koja od funkcija f ili g bila diferencijabilna, sa malom ili većom teškoćom mogli bismo, primenjujući teoremu o izvodu složene funkcije (teorema 1.6.1), da odredimo izvod svake od njih. Međutim, i u tom slučaju, kao i u slučaju kada nije moguće odrediti odgovarajuće analitičke izraze za funkcije f ili g ili kada njihovo određivanje nije potrebno, izvodi funkcija f ili g mogu se naći neposredno.

Teorema 1.8.1. *Ako su φ i ψ diferencijabilne funkcije na segmentu T i ako je $\varphi'(t) \neq 0$, tada je i funkcija f diferencijabilna i važi*

$$y' = f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (t \in T).$$

Dokaz. Kako su φ i ψ diferencijabilne funkcije, važe jednakosti

$$dx = \varphi'(t)dt \qquad \text{i} \qquad dy = \psi'(t)dt$$

na osnovu kojih neposredno sleduje

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad (t \in T). \quad \square$$

Teorema 1.8.2. *Ako su φ i ψ diferencijabilne funkcije na segmentu T i ako je $\psi'(t) \neq 0$, tada je i funkcija g diferencijabilna i važi*

$$x' = g'(y) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \qquad (t \in T).$$

Napomenimo da se za izvode $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$ umesto x'_t i y'_t, respektivno, koriste oznake $\dot{x}$ i $\dot{y}$. Tada se y'_x i x'_y označavaju sa $y'_x = \dot{y}/\dot{x}$, kao i $x'_y = \dot{x}/\dot{y}$.

Primer 1.8.1. Funkcijama φ i ψ, određenim pomoću

$$x = \varphi(t) = \cos t \qquad \text{i} \qquad y = \psi(t) = \sin t \quad (0 < t < \pi), \tag{1.8.1}$$

definisana je funkcija

$$x \mapsto y = f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = \sin(\arccos x) \qquad (-1 < x < 1).$$

Kako je $\dot{x} = \varphi'(t) = -\sin t$ i $\dot{y} = \psi'(t) = \cos t$, na osnovu teoreme 1.8.1, sleduje

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{\sin t}, \qquad \text{tj.} \qquad y'_x = -\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Naravno, do istog rezultata moguće je doći i na sledeći način: Iz (1.8.1) sleduje $x^2 + y^2 = 1$, odakle, zbog $y > 0$, dobijamo

$$y = \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1),$$

a odavde sleduje

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{tj.} \quad y'_x = -\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = -\frac{\cos t}{\sin t}. \quad \triangle$$

Primer 1.8.2. Neka su date funkcije

$$t \mapsto x = \varphi(t) = e^{2t}\cos^2 t \qquad \text{i} \qquad t \mapsto y = \psi(t) = e^{2t}\sin^2 t,$$

gde je $t \neq \pi/4 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Kako je

$$\varphi'(t) = 2e^{2t}\cos t(\cos t - \sin t) \qquad \text{i} \qquad \psi'(t) = 2e^{2t}\sin t(\cos t + \sin t),$$

neposredno dobijamo

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \tan t \cdot \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} = \tan t \cdot \tan\Big(\frac{\pi}{4} + t\Big). \quad \triangle$$

1.9. Izvodi višeg reda

Kao što smo u odeljku 1.3 naglasili, izvod funkcije $x \mapsto y = f(x)$ je funkcija $x \mapsto g(x) = f'(x)$.

Ako je funkcija g diferencijabilna funkcija u tački x, tj. ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

kažemo da je g' drugi izvod funkcije f u tački x i označavamo ga sa y'' ili $f''(x)$. Zbog toga se sada za izvode y' i $f'(x)$ kaže da predstavljaju prvi izvod funkcije $x \mapsto y = f(x)$.

Dakle, važi

$$y'' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

tj.

$$y'' = (y')' \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \big(f'(x)\big)'.$$

Naravno, operatorima $\mathcal{D}$ i d/dx to simbolizujemo sa

$$y'' = \mathcal{D}y' = \frac{d}{dx}\,y' \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \mathcal{D}f'(x) = \frac{d}{dx}\,f'(x). \tag{1.9.1}$$

Kako je $\mathcal{D}y' = \mathcal{D}(\mathcal{D}y)$, tj. $\mathcal{D}f'(x) = \mathcal{D}(\mathcal{D}f(x))$, ako stavimo $\mathcal{D}(\mathcal{D}y) = \mathcal{D}^2 y$, tj. $\mathcal{D}(\mathcal{D}f(x)) = \mathcal{D}^2 f(x)$ umesto (1.9.1), možemo pisati

$$y'' = \mathcal{D}^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \mathcal{D}^2 f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\,.$$

Napomenimo da se za drugi izvod neke funkcije kaže da je to njen izvod drugog reda ili izvod reda dva. Isto tako, za funkciju za koju postoji njen drugi izvod kažemo da je dvaput diferencijabilna.

Primer 1.9.1. 1° Ako je $y = x^3$, tada je

$$y' = 3x^2 \qquad \text{i} \qquad y'' = 6x.$$

2° Za $y = \sin x$, imamo

$$y' = \cos x \qquad \text{i} \qquad y'' = -\sin x. \quad \triangle$$

Prirodno, sada se nameće pitanje postojanja trećeg izvoda, tj. postojanje izvoda trećeg reda neke funkcije. Ako za funkciju $x \mapsto y = f(x)$ postoji treći izvod, označavamo ga sa y''' ili $f'''(x)$.

Pomoću operatora $\mathcal{D}$ i d/dx ovaj izvod označavamo sa

$$y''' = \mathcal{D}^3 y, \qquad \text{tj.} \qquad y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

i

$$f'''(x) = \mathcal{D}^3 f(x), \qquad \text{tj.} \qquad f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}\,.$$

Primer 1.9.2. Kao što smo videli, za funkciju $x \mapsto y = \sin x$ je $y'' = -\sin x$, odakle sleduje da je $y''' = -\cos x$. $\triangle$

Induktivnim pristupom dolazimo do pojma n-tog izvoda, tj. izvoda reda n neke funkcije $x \mapsto y = f(x)$, u oznakama

$$y^{(n)}, \quad \mathcal{D}^n y, \quad \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{i} \quad f^{(n)}(x), \quad \mathcal{D}^n f(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}\,.$$

To je, u stvari, prvi izvod $(n-1)$-og izvoda. Važi, dakle,

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}\,,$$

tj.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)', \qquad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Primer 1.9.3. Ako su m i n prirodni brojevi, matematičkom indukcijom lako se dokazuju jednakosti:

$$(x^m)^{(n)} = n!\binom{m}{n}x^{m-n} \quad (n \le m), \qquad (\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad \triangle$$

Definicija 1.9.1. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je n *puta diferencijabilna* u tački $x = a$, ako u tački a ima izvod n-tog reda.

Primer 1.9.4. Funkcija $x \mapsto y = x^n|x|$ $(x \in \mathbb{R})$ je n puta diferencijabilna u tački $x = 0$. Ona u tački $x = 0$ nema izvod reda $n + 1$. $\triangle$

Definicija 1.9.2. Za funkciju za koju postoji izvod proizvoljnog reda, kažemo da je *proizvoljan broj puta* ili *beskonačno puta diferencijabilna funkcija.*

Primer 1.9.5. Funkcije $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ $x \mapsto \arctan x$ su proizvoljan broj broj puta diferencijabilne funkcije. $\triangle$

Napomenimo da, kada je to zbog jednoobraznosti pisanja potrebno, smatramo da je $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Neka su $x \mapsto u(x)$ i $x \mapsto v(x)$ n puta diferencijabilne funkcije i neka je $f(x) = u(x)v(x)$. Tada je i funkcija f takođe n puta diferencijabilna. Pokazaćemo da se izvod $f^{(n)}$ može izraziti pomoću izvoda $u^{(k)}$ i $v^{(k)}$ za $k = 0, 1, \ldots, n$.

Uzastopnim diferenciranjem nalazimo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),\\
f''(x) &= (u(x)v(x))'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x),\\
f'''(x) &= (u(x)v(x))''' = u'''(x)v(x) + 3u''(x)v'(x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 3u'(x)v''(x) + u(x)v'''(x).
\end{aligned}$$

Očigledno je da postoji sličnost ovih jednakosti sa binomnom formulom, a matematičkom indukcijom može se dokazati da važi jednakost

$$f^{(n)}(x) = (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x), \tag{1.9.2}$$

koja je poznata kao *Leibnitzova formula* za n-ti izvod funkcije.

Primer 1.9.6. Za $f(x) = x^2 \cos x$ imamo

$$f'''(x) = x^2 \sin x - 6x \cos x - 6 \sin x. \quad \triangle$$

Nije teško proveriti da za svaku $(m+n)$-puta diferencijabilnu funkciju $x \mapsto y = f(x)$, važe jednakosti

$$f^{(m+n)}(x) = \big(f^{(n)}(x)\big)^{(m)} = \big(f^{(m)}(x)\big)^{(n)}.$$

Sada je moguće govoriti i o izvodu višeg reda funkcija koje su zadate parametarski. Kao što smo u prethodnom odeljku videli, ako je pomoću

$$t \mapsto x = \varphi(t) \qquad \text{i} \qquad t \mapsto y = \psi(t) \qquad (t \in T)$$

definisana funkcija

$$x \mapsto y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \qquad (x \in \varphi(T))$$

i ako su φ i ψ diferencijabilne funkcije, pri čemu je $\varphi'(t) \neq 0$, tada je izvod $y' = f'(x)$ određen pomoću

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \tag{1.9.3}$$

Međutim, ako su φ i ψ dvaput diferencijabilne funkcije, pri čemu je $\varphi'(t) \neq 0$, tada primenom teoreme 1.6.1 neposredno sleduje

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx}\,,$$

odakle, na osnovu (1.9.3), dobijamo

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3}\,. \end{aligned}$$

Ako stavimo $\varphi''(t) = \ddot{x}$ i $\psi''(t) = \ddot{y}$, tada je

$$y'' = f''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\,. \tag{1.9.4}$$

Primer 1.9.7. Neka je funkcija $x \mapsto y = f(x)$ zadata parametarski pomoću

$$x = \cos t \qquad \text{i} \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le \pi).$$

Tada je $\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$ i $\ddot{x} = -\cos t$, $\ddot{y} = -\sin t$, odakle sleduje

$$y' = f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t,$$

a na osnovu (1.9.4)

$$y'' = f''(x) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \qquad \triangle$$

Primer 1.9.8. Ako je pomoću

$$x = a(t - \sin t) \qquad \text{i} \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le x \le 2\pi)$$

definisana funkcija $x \mapsto y = f(x)$, tada je

$$\dot{x} = a(1 - \cos t) \qquad \text{i} \qquad \dot{y} = a\sin t,$$

tj.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}\,.$$

Kako je

$$\ddot{x} = a\sin t \qquad \text{i} \qquad \ddot{y} = a\cos t,$$

na osnovu (1.9.4) sleduje

$$y'' = f''(x) = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}\,. \qquad \triangle$$

1.10. Diferencijali višeg reda

Neka je funkcija $x \mapsto y = f(x)$ diferencijabilna u tački x. Kao što smo videli, njen diferencijal određen je pomoću $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$. Za fiksirano x diferencijal je, kao što smo videli, linearna funkcija po Δx. Međutim, ako fiksiramo Δx, diferencijal se može tretirati kao funkcija od x. Dakle,

$$x \mapsto df(x) = f'(x)\Delta x = g(x).$$

Ako je funkcija f dvaput diferencijabilna u tački x, tada je funkcija g diferencijabilna u istoj tački, pa je njen diferencijal (za isto fiksirano Δx) dat sa

$$dg(x) = g'(x)\Delta x = f''(x)\Delta x \cdot \Delta x = f''(x)(\Delta x)^2.$$

Na ovaj način dobijamo tzv. *drugi diferencijal* ili *diferencijal drugog reda* funkcije f u tački x, koji označavamo sa d^2y ili $d^2f(x)$. Dakle,

$$d^2y = d^2f(x) = f''(x)(\Delta x)^2 = f''(x)dx^2,$$

s obzirom da je $dx = \Delta x$.

Za $dy = df(x) = f'(x)dx$ kaže da je *prvi diferencijal* ili *diferencijal prvog reda* funkcije $y = f(x)$.

Primer 1.10.1. Neka je $y = \sin 2x$. Kako je $y' = 2\cos 2x$ i $y'' = -4\sin 2x$, imamo

$$d^2y = y''dx^2 = -4\sin 2x\, dx^2. \quad \triangle$$

Sada se, induktivno, za n puta diferencijabilnu funkciju $x \mapsto y = f(x)$ može uvesti pojam diferencijala reda n, pomoću

$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) \qquad (n > 1),$$

odakle nalazimo da je

$$d^ny = d^nf(x) = f^n(x)(\Delta x)^n = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Primer 1.10.2. Za funkcije $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \log x$, imamo

$$d^nf(x) = d^n(\sin x) = \sin\Big(x + \frac{n\pi}{2}\Big)dx^n$$

i

$$d^ng(x) = d^n(\log x) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}\,dx^n. \quad \triangle$$

1.11. Osnovne osobine diferencijabilnih funkcija

Jednu veoma važnu klasu funkcija čine diferencijabilne funkcije. One imaju veliki značaj u matematici i njenim primenama, a naročito u tehnici. Zbog toga ćemo u ovom odeljku ukazati na neke osobine koje poseduju diferencijabilne funkcije.

Teorema 1.11.1. *Neka funkcija* $x \mapsto f(x)$ $(x \in [a,b])$ *dostiže svoju najmanju ili svoju najveću vrednost u tački* $\xi \in (a,b)$. *Ako je* f *diferencijabilna funkcija u tački* ξ, *tada je* $f'(\xi) = 0$.

Dokaz. Neka u tački ξ funkcija f ima najmanju vrednost, što znači da je tada $f(x) \geq f(\xi)$ za svako $x \in [a,b]$. Tada, očigledno, važe nejednakosti

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \quad (x<\xi) \qquad \text{i} \qquad \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \quad (x>\xi). \tag{1.11.1}$$

Kako, na osnovu pretpostavke da je funkcija f diferencijabilna u tački ξ, postoji $\displaystyle\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, iz nejednakosti (1.11.1) sleduje da je

$$f'(\xi) \leq 0 \qquad \text{i} \qquad f'(\xi) \geq 0,$$

što znači da je $f'(\xi) = 0$. Nije teško dokazati da isti zaključak važi i za slučaj kada funkcija f u tački ξ dostiže svoju najveću vrednost. $\square$

Primer 1.11.1. Očigledno, za funkciju $x \mapsto f(x) = x^2$ $(-1 \leq x \leq 2)$ važi

$$\min_{-1\leq x\leq 2} f(x) = 0 = f(0) \qquad \text{i} \qquad f'(0) = 0.$$

Dakle, $\xi = 0$. $\triangle$

Primer 1.11.2. Za diferencijabilnu funkciju $x \mapsto g(x) = \sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ je

$$\min_{0\leq x\leq 2\pi} g(x) = \min_{0\leq x\leq 2\pi} \sin x = -1 = \sin\frac{3\pi}{2}$$

i

$$\max_{0\leq x\leq 2\pi} g(x) = \max_{0\leq x\leq 2\pi} \sin x = 1 = \sin\frac{\pi}{2},$$

pa na osnovu teoreme 1.11.1 zaključujemo da u intervalu $(0, 2\pi)$ postoje vrednosti $\xi_1 = 3\pi/2$ i $\xi_2 = \pi/2$ tako da važe jednakosti

$$g'\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \text{i} \qquad g'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

koje su očigledne. $\triangle$

Teorema 1.11.1 poznata je kao *Fermatova*[33] *teorema.*

---

[33] Pierre de Fermat (1601–1665), francuski matematičar.

Teorema 1.11.2. *Neka je $x \mapsto f(x)$ $(x \in [a,b])$ neprekidna funkcija i neka je $f(a) = f(b)$. Ako je f diferencijabilna u intervalu (a,b), tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a,b)$ za koju je $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Kako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$, ona ima i svoju najmanju i svoju najveću vrednost na tom segmentu (videti napomenu 2.3.2 i teoremu 2.3.2, obe u III glavi). Ako se ove vrednosti postižu u tačkama a i b, tada, zbog uslova $f(a) = f(b)$, zaključujemo da je funkcija f konstantna na $[a,b]$, pa je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a,b)$. U suprotnom slučaju, bar jednu od ovih vrednosti (najmanju ili najveću) funkcija f dostiže u nekoj tački $\xi \in (a,b)$. Kako je f diferencijabilna u tački ξ, na osnovu Fermatove teoreme, zaključujemo da je $f'(\xi) = 0$. $\square$

Primer 1.11.3. 1° Funkcija $x \mapsto x^2$ $(-1 \le x \le 1)$ je diferncijabilna funkcija i važi $f(-1) = f(1) = 1$. Prema tome, funkcija f ispunjava uslove teoreme 1.11.2, pa u intervalu $(-1,1)$ postoji tačka ξ takva da je $f'(\xi) = 0$. Nije teško zaključiti da je $\xi = 0$.

2° Funkcija $x \mapsto g(x) = \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ zadovoljava uslove teoreme 1.11.2 jer je diferencijabilna i važi $g(0) = g(2\pi) = 0$. Prema tome, postoji $\xi \in (0, 2\pi)$ tako da je $g'(\xi) = \cos\xi = 0$. Primetimo da u ovom slučaju postoje dve takve tačke $\xi_1 = \pi/2$ i $\xi_2 = 3\pi/2$. $\triangle$

U literaturi, teorema 1.11.2 je poznata kao *Rolleova*[34)] *teorema*.

Sledeće tvrđenje je poznato kao *Lagrangeova teorema*:

Teorema 1.11.3. *Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i neka je diferencijabilna za svako $x \in (a,b)$. Tada u intervalu (a,b) postoji bar jedna tačka ξ za koju je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{1.11.2}$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto F(x)$ $(x \in [a,b])$, određenu sa

$$F(x) = \big(f(x) - f(a)\big)(b-a) - \big(f(b) - f(a)\big)(x-a).$$

Ovako definisana funkcija F zadovoljava uslove Rolleove teoreme, pa, prema tome, postoji $\xi \in (a,b)$ tako da je $F'(\xi) = 0$.

Kako je

$$F'(x) = f'(x)(b-a) - (f(b) - f(a)),$$

za $x = \xi$, neposredno sleduje tvrđenje teoreme. $\square$

---

34) Michel Rolle (1652–1719), francuski matematičar.