Stavimo $\xi = x + \Delta x$, gde je $x = x_0$ neka vrednost u okolini nule ξ. Tada, primenom formule (1.3.1), imamo

$$0 = f(\xi) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

tj. $\Delta x \approx -f(x_0)/f'(x_0)$, što znači da nulu ξ možemo aproksimirati pomoću

$$\xi = x_0 + \Delta x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ako desnu stranu u ovoj jednakosti označimo sa x_1, tj. stavimo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

tada sleduje da je $\xi \approx x_1$. Stavljajući sada x_1 umesto x_0, dobijamo novu aproksimaciju $\xi \approx x_2$, gde je

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Nastavljajući ovaj postupak možemo konstruisati niz $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ stavljajući

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Na ovaj način dobijaju se vrednosti x_k $(k = 0, 1, 2, \dots)$, koje su aproksimacije za ξ. Može se pokazati da je ovaj niz konvergentan i da mu je granica ξ. Navedeni postupak određivanja približnih vrednosti za ξ poznat je kao *Newtonov*[32] *metod* ili *metod tangente*. Za detalje u vezi sa ovim metodom videti knjigu: G. V. Milovanović, *Numerička analiza, I deo* (treće izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1991.

1.4. Teoreme o izvodima

U ovom odeljku ukazaćemo na neke osnovne osobine operatora diferenciranja. Pri tome, ako nije drugačije naglašeno, smatratćemo da se pojam diferencijabilnosti funkcije odnosi na tačku x, ali da se može uzeti i kao diferencijabilnost na intervalu (a, b).

[32] Isac Newton (1643–1727), veliki engleski matematičar i fizičar.

Teorema 1.4.1. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije, diferencijabilna je i funkcija*

$$x \mapsto F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

i važi jednakost

$$F'(x) = \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x). \tag{1.4.1}$$

Dokaz. Na osnovu definicije neposredno imamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha f(x+\Delta x) + \beta g(x+\Delta x) - \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha f(x+\Delta x) - \alpha f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta g(x+\Delta x) - \beta g(x)}{\Delta x} \\ &= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \alpha f'(x) + \beta g'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Dakle, na osnovu (1.4.1), tj. na osnovu jednakosti

$$\mathcal{D}\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha\, \mathcal{D} f(x) + \beta\, \mathcal{D} g(x),$$

zaključujemo da je operator diferenciranja linearan.

Primer 1.4.1. Kako su funkcije $x \mapsto 3x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ i $x \mapsto 5\sqrt{x}$ $(x > 0)$ diferencijabilne funkcije, za $x > 0$ važi jednakost

$$(3x^2 + 5\sqrt{x}\,)' = 3(x^2)' + 5(\sqrt{x}\,)' = 6x + \frac{5}{2\sqrt{x}}\,. \quad \triangle$$

Primer 1.4.2. Za hiperbolične funkcije

$$x \mapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

imamo

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x,$$

i

$$(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x. \quad \triangle$$

Nije teško primenom matematičke indukcije zaključiti da za n diferencijabilnih funkcija $x \mapsto f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ važi

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\Big)' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x).$$

Teorema 1.4.2. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije, diferencijabilna je i funkcija $x \mapsto y = f(x)g(x)$ i važi jednakost*

$$y' = \big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dokaz. Kako je

$$\big(f(x)g(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x},$$

jedno za drugim sleduje

$$\begin{aligned} y' &= \big(f(x)g(x)\big)' \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\, g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)\, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Primer 1.4.3. Ako je $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sin x$, tada je

$$\big(f(x)g(x)\big)' = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x\,. \quad \triangle$$

Primer 1.4.4. Kako je $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, za funkciju $x \mapsto \sin 2x$ $(x \in \mathbb{R})$ imamo

$$\begin{aligned} (\sin 2x)' &= (2 \sin x \cos x)' = 2(\sin x \cos x)' = 2\big((\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'\big) \\ &= 2\big(\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\big) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x. \quad \triangle \end{aligned}$$

Za količnik dve diferencijabilne funkcije važi:

Teorema 1.4.3. *Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ $(\neq 0)$ diferencijabilne funkcije, diferencijabilna je i funkcija $x \mapsto F(x) = f(x)/g(x)$ i važi jednakost*

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}
F'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\left(g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)^2}\big(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\big)\,,
\end{aligned}$$

tvrđenje je dokazano. □

Primer 1.4.5. Ako je $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$, za $x \neq 0$ imamo

$$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{(\sin x)'x^2 - (x^2)'\sin x}{(x^2)^2} = \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}\,. \qquad \triangle$$

Primer 1.4.6. Za funkciju $x \mapsto \tan x$ $(x \neq (2k+1)\pi/2)$ važi

$$\begin{aligned}
(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\big((\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'\big)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}(\cos x\cos x + \sin x\sin x)\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\,. \qquad \triangle
\end{aligned}$$

Primer 1.4.7. Primenom teoreme 1.4.3, za hiperbolične funkcije

$$x \mapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{i} \qquad x \mapsto \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

neposredno sleduje

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' = \Big(\frac{\sinh x}{\cosh x}\Big)' &= \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}
$$

i slično

$$
(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}\,. \qquad \triangle
$$

Napomenimo da se za teoreme dokazane u ovom odeljku često kaže da predstavljaju *pravila za traženje izvoda.*

Ako su $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(x)$ diferencijabilne funkcije, za određivanje diferencijala važe sledeća pravila:

$$
\begin{aligned}
d(f(x) + g(x)) &= df(x) + dg(x), \\
d(f(x)g(x)) &= g(x)df(x) + f(x)dg(x), \\
d(\alpha f(x)) &= \alpha df(x), \\
d\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) &= \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}\,.
\end{aligned}
$$

1.5. Izvod inverzne funkcije

Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna i strogo monotona u nekoj okolini tačke x. Tada (videti teoremu 1.7.1, glava I) postoji inverzna funkcija f^{-1} određena sa $x = f^{-1}(y)$.

Dokazaćemo da za takve funkcije važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.5.1. *Ako je f diferencijabilna funkcija u tački x i ako je $f'(x) \neq 0$, tada je diferencijabilna i njena inverzna funkcija f^{-1}, u tački $y = f(x)$, i važi jednakost*

$$
\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{1.5.1}
$$

Dokaz. Pre svega, iz $x = f^{-1}(y)$ i $y = f(x)$ sleduje

$$
\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \qquad \text{i} \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).
$$

Kako su funkcije f i f^{-1} neprekidne, može se zaključiti da $\Delta y \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, ali, isto tako, i da $\Delta x \to 0$ kada $\Delta y \to 0$. Stoga je

$$\begin{aligned}\big(f^{-1}(y)\big)' &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}},\end{aligned}$$

odakle, zbog diferncijabilnosti funkcije f, sleduje

$$\big(f^{-1}(y)\big)' = \frac{1}{f'(x)}\ . \quad \square$$

Dakle, za izvod inverzne funkcije imamo simboličku formulu

$$\mathcal{D}_y f^{-1}(y) = \frac{1}{\mathcal{D}_x f(x)}\ .$$

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da se traženje izvoda neke funkcije može svesti na traženje izvoda njoj inverzne funkcije.

Primer 1.5.1. Ako je $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1)$ sleduje

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ . \quad \triangle$$

Primer 1.5.2. Za $y = \arccos x$ $(-1 < x < 1)$ imamo

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ . \quad \triangle$$

Primer 1.5.3. Za funkcije

$$x \mapsto y = \arctan x \qquad \text{i} \qquad x \mapsto y = \operatorname{arccot} x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

dobijamo

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1/(\cos^2 y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\ ,$$

i

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-1/(\sin^2 y)} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\ . \quad \triangle$$

Primer 1.5.4. Za $y = \log x$ $(x > 0)$, zbog $x = e^y$, imamo

$$(\log x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}\ . \quad \triangle$$

1.6. Izvod složene funkcije

Neka je funkcijama

$$x \mapsto u = g(x) \quad (x \in D) \qquad \text{i} \qquad u \mapsto y = f(u) \quad (u = g(x) \in g(D))$$

definisana složena funkcija

$$x \mapsto y = f(u) = f\big(g(x)\big) = F(x) \qquad (x \in D).$$

Teorema 1.6.1. *Ako je g diferencijabilna funkcija u tački x, a f diferencijabilna u tački $u = g(x)$, tada je, u tački x, diferencijabilna i složena funkcija F i važi jednakost*

$$y' = (F(x))' = (f(g(x))' = f'\,(g(x))\,g'(x).$$

Dokaz. Ako stavimo $u = g(x)$ i $U = g(X)$, tj.

$$F(X) = f(g(X)) = f(U),$$

imamo

$$\begin{aligned} F(X) - F(x) &= f\,(g(X)) - f\,(g(x)) = f(U) - f(u) \\ &= \frac{f(U) - f(u)}{U - u}\,(U - u) = \frac{f(U) - f(u)}{U - u}\,\big(g(X) - g(x)\big). \end{aligned}$$

Tada je

$$\frac{F(X) - F(x)}{X - x} = \frac{f(U) - f(u)}{U - u} \cdot \frac{g(X) - g(x)}{X - x}\,,$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{X \to x} \frac{F(X) - F(x)}{X - x} \\ &= \lim_{U \to u} \frac{f(U) - f(u)}{U - u} \cdot \lim_{X \to x} \frac{g(X) - g(x)}{X - x} \\ &= f'(u) g'(x) \\ &= f'(g(x)) g'(x), \end{aligned}$$

jer, kada $X \to x$, zbog neprekidnosti funkcije g, sleduje da $g(X) \to g(x)$, tj. da $U \to u$. $\square$

Dakle, ako je $y = F(x) = f(g(x))$, zaključujemo da za operatore $\mathcal{D}$ i d/dx važe jednakosti

$$y' = \mathcal{D}y = \mathcal{D}_x F(x) = \mathcal{D}_x f\,(g(x)) = \mathcal{D}_u f(u)\, \mathcal{D}_x g(x)$$

i

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{du}f(u)\,\frac{d}{dx}u = \frac{d}{du}f(u)\frac{d}{dx}g(x).$$

Primer 1.6.1. Neka je $y = f(x) = (x^2+1)^{100}$. Ako stavimo $y = u^{100}$ i $u = x^2 + 1$, imamo

$$y' = f'(x) = \mathcal{D}_u f \cdot \mathcal{D}_x u = 100u^{99} \cdot 2x = 200x(x^2+1)^{99}. \quad \triangle$$

Primer 1.6.2. Neka je $y = \sqrt[3]{\sin x}\ \ (x \in \mathbb{R})$. Ako stavimo

$$y = \sqrt[3]{u}, \quad u = \sin x,$$

dobijamo

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}\,\cos x = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,\cos x\,. \quad \triangle$$

Primenom teoreme 1.6.1 može se lako dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 1.6.2. *Ako je parna funkcija diferencijabilna, njen izvod je neparna funkcija. Ako je neparna funkcija diferencijabilna, njen izvod je parna funkcija.*

Za izvod kompozicije od više diferencijabilnih funkcija važi:

Teorema 1.6.3. *Ako su funkcije $u_k \mapsto f_k(u_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ diferencijabilne, tada je i kompozicija $x \mapsto F(x) = (f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)(x)$ diferencijabilna funkcija i važi jednakost*

$$F'(x) = f_1'(u_1) f_2'(u_2) \cdots f_n'(u_n),$$

gde su $u_n = x$ i $u_{k-1} = f_k(u_k)$ $(k = n, n-1, \ldots, 2)$.

Primer 1.6.3. Neka je $y = \sin^3(x^2+1)$ $(x \in \mathbb{R})$. Ako stavimo

$$y = u^3,\ u = \sin v,\ v = x^2 + 1,$$

imamo

$$y' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\mathcal{D}_u u^3)\,(\mathcal{D}_v \sin v)\,\big(\mathcal{D}_x(x^2+1)\big) = 6x \sin^2(x^2+1)\cos(x^2+1)\,. \quad \triangle$$

Napomena 1.6.1. Primenom teoreme 1.6.1, lako se može dokazati teorema 1.5.1 o izvodu inverzne funkcije. Naime, kako je

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x,$$

na osnovu teoreme 1.6.1, važi

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}(x)\right)' = 1,$$

odakle sleduje jednakost (1.5.1).

Ponekad je, da bi se odredio izvod diferencijabilne funkcije $x \mapsto y = f(x)$, zgodnije posmatrati pogodno izabranu složenu diferencijabilnu funkciju

$$y \mapsto F(y) = F\left(f(x)\right) = G(x). \tag{1.6.1}$$

Iz (1.6.1), na osnovu teoreme 1.6.1, diferenciranjem dobijamo

$$F'(y)y' = G'(x),$$

odakle sleduje

$$y' = \frac{1}{F'(y)}\,G'(x) \qquad (F'(y) \neq 0).$$

Ovaj način traženja izvoda se često primenjuje ako se za funkciju F uzme $F(y) = \log y$. Tada iz $\log y = G(x)$ dobijamo

$$\frac{1}{y}\,y' = G'(x), \qquad \text{tj.} \qquad y' = f'(x) = yG'(x) = f(x)G'(x).$$

Primer 1.6.4. Neka je $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$. Tada je

$$\log y = \log\bigl(x^{\sin x}\bigr) = \sin x\,\log x,$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$\frac{y'}{y} = \cos x\,\log x + \frac{\sin x}{x},$$

tj.

$$y' = y\Bigl(\cos x\,\log x + \frac{\sin x}{x}\Bigr) = x^{\sin x}\Bigl(\cos x\,\log x + \frac{\sin x}{x}\Bigr). \qquad \triangle$$

Određivanje izvoda na način kako je to učinjeno u primeru 1.6.4, naziva se *logaritamsko diferenciranje*.

Kao što smo videli u odeljku 1.9, glava I, pod određenim uslovima, jednakost

$$F(x,y)=0 \qquad (x \in D_x,\ y \in D_y)$$

implicitno definiše funkciju

$$x \mapsto y = f(x) \qquad (x \in D_x)$$

za koju je

$$F(x,y) = F(x,f(x)) \equiv 0.$$

Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija. Pokazaćemo da se, u slučajevima kada funkcija F ima podesan oblik, primenom teoreme 1.6.1, može odrediti izvod funkcije f, bez njenog eksplicitnog određivanja.

Na primer, ako su $x \mapsto g(x)$ i $y \mapsto h(y)$ diferencijabilne funkcije i ako je

$$F(x,y) \equiv g(x) + h(y) = g(x) + h(f(x)),$$

iz

$$g(x) + h(f(x)) = 0,$$

diferenciranjem dobijamo

$$g'(x) + h'(f(x)) \cdot f'(x) = 0, \qquad \text{tj.} \qquad g'(x) + h'(y)y' = 0,$$

odakle, ako je $h'(y) \neq 0$, sleduje

$$f'(x) = y' = -\frac{g'(x)}{h'(y)} \qquad (h'(y) \neq 0).$$

Primer 1.6.5. Neka je $F(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$. Diferenciranjem dobijamo $2x + 2yy' = 0$, odakle sleduje $y' = -x/y$ $(y \neq 0)$. $\triangle$

Primer 1.6.6. Ako je $F(x,y) \equiv e^x \sin x + e^y \cos y - 2 = 0$, posle diferenciranja dobijamo

$$e^x(\sin x + \cos x) + e^y(\cos y - \sin y)y' = 0,$$

tj.

$$y' = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{e^y(\sin y - \cos y)} \qquad \Big(y \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\Big). \quad \triangle$$

Napomena 1.6.2. Nije teško zaključiti da je moguće odrediti izvod implicitno definisane funkcije $x \mapsto y = f(x)$ i u slučaju kada je ona zadata jednakošću

$$F\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(y)\Big) = 0,$$

ako su funkcije $x \mapsto g_i(x)$ i $x \mapsto h_i(x)$ diferencijabilne i ako je ispunjen uslov

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i'(y) \neq 0.$$

Primer 1.6.7. Ako je jednakošću $F(x,y) = e^x \cos y + e^y \sin x = 0$ definisana diferencijabilna funkcija $x \mapsto y = f(x)$, primenom teoreme 1.6.1 dobijamo

$$y'(e^x \sin y - e^y \sin x) = e^x \cos y + e^y \cos x,$$

tj.

$$y' = f'(x) = \frac{e^x \cos y + e^y \cos x}{e^x \sin y - e^y \sin x}. \qquad \triangle$$

1.7. Tablice izvoda elementarnih funkcija

Na osnovu primera iz odeljaka 1.4, 1.5 i 1.6, moguće je sačiniti tabelarni pregled izvoda osnovnih elementarnih funkcija.

$$\begin{array}{ll}
y = x^n & y' = nx^{n-1} \\
y = e^x & y' = e^x \\
y = a^x & y' = a^x \log a \\
y = \log x & y' = \dfrac{1}{x} \\
y = \sin x & y' = \cos x \\
y = \cos x & y' = -\sin x \\
y = \tan x & y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\
y = \cot x & y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}
\end{array}$$