IV G L A V A

Diferenciranje funkcija jedne realne promenljive

1. IZVOD I DIFERENCIJAL FUNKCIJE

1.1. Izvod funkcije i diferencijabilnost

Pretpostavimo da je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana u okolini $U(a)$ tačke $x = a$ i da je neprekidna u toj okolini. Za veličine

$$x - a \qquad \text{i} \qquad f(x) - f(a)$$

kažemo, redom, da su *priraštaj argumenta* i *priraštaj funkcije* u tački $x = a$. Razumljivo, kada $x \to a$, veličina $x - a$ je beskonačno mala veličina, a zbog pretpostavke o neprekidnosti funkcije f, beskonačno mala veličina je i $f(x) - f(a)$. Kao što ćemo videti, interesantno je proučiti odnos ovih dveju beskonačno malih veličina.

Zato ćemo posmatrati graničnu vrednost količnika

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.1.1}$$

kada $x \to a$.

Definicija 1.1.1. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna u okolini $U(a)$ i ako postoji konačna granična vrednost količnika (1.1.1) kada $x \to a$, kažemo da funkcija f ima izvod u tački $x = a$, u oznaci $f'(a)$, i pišemo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{1.1.2}$$

Primer 1.1.1. Funkcija $x \mapsto f(x) = x^2 + 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ u tački $x = a$ ima izvod

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 + 3x - (a^2 + 3a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a + 3) = 2a + 3.$$

Za $a = 2$ imamo $f'(2) = 7$. $\triangle$

Primer 1.1.2. Kako je

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} \cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot \lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos a,$$

funkcija $x \mapsto \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ u tački $x = a$ ima izvod $\cos a$. $\triangle$

Kako količnik (1.1.1) predstavlja koeficijent pravca sečice S koja prolazi kroz tačke $A(a, f(a))$ i $M(x, f(x))$ (videti sliku 1.1.1), važi jednakost

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \tan\varphi,$$

gde je φ ugao koji sečica S zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose. Očigledno, ugao φ zavisi od položaja tačke M, što znači da zavisi od x. S obzirom da $x \to a$, sečica S teži tangenti T, koja u tački A dodiruje krivu $y = f(x)$, i u graničnom slučaju za ugao φ važi jednakost $\lim\limits_{x\to a}\varphi = \alpha$, gde je α ugao koji tangenta T zaklapa sa pozitivnim delom x-ose. Ovo znači da jednačina tangente T glasi

$$y - f(a) = \tan\alpha\cdot(x-a), \quad \text{tj.}\quad y - f(a) = \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a),$$

ili, na osnovu (1.1.2),

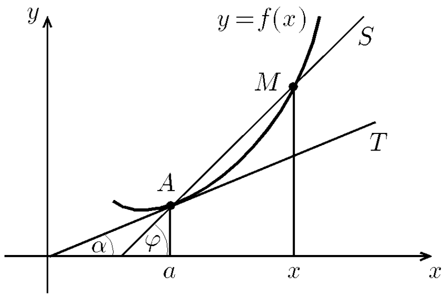
$$y - f(a) = f'(a)(x-a). \tag{1.1.3}$$

Prema tome, geometrijski, izvod $f'(a)$ predstavlja koeficijent pravca tangente T na krivu $y = f(x)$ u tački $A(a, f(a))$.

Primetimo da, ako je $f'(a) \neq 0$, prava

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \tag{1.1.4}$$

takođe prolazi kroz tačku A i sa tangentom (1.1.3) zaklapa prav ugao. Za pravu (1.1.4) kažemo da je *normala na krivu* $y = f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$.



Sl. 1.1.1

Ako je $f'(a) = 0$, jednačina tangente je $y = f(a)$ i to je prava koja je paralelna sa x-osom. U tom slučaju, jednačina normale glasi $x = a$. Očigledno, to je prava koja je paralelna y-osi.

Izvod funkcije ima svoje značenje i u fizici. Neka je, na primer, M materijalna tačka koja se kreće. Kao što je poznato, ako je njeno kretanje ravnomerno i ako za interval vremena t tačka M pređe put dužine s, tada količnik s/t predstavlja njenu brzinu kretanja.

Međutim, ako je kretanje tačke neravnomerno, pređeni put s je funkcija vremena t, određena funkcijom $t \mapsto s(t)$ $(t > 0)$. Neka je t_0 uočeni trenutak i $t > t_0$. Za vreme $t - t_0$ posmatrana tačka M pređe put $s(t) - s(t_0)$, a količnik $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ je srednja brzina njenog kretanja od trenutka t_0 do trenutka t. U opštem slučaju taj količnik nije konstanta, a granična vrednost

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

predstavlja brzinu kretanja tačke M u trenutku t_0. To, zapravo, znači da je brzina kretanja materijalne tačke M u trenutku t_0 određena izvodom funkcije puta $t \mapsto s(t)$ za $t = t_0$.

Ako granična vrednost (1.1.2) ne postoji, tada funkcija f nema izvod u tački a.

Primer 1.1.3. Kako je

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

funkcija $x \mapsto |x|$ nema izvod u tački $x = 0$.

Nije teško pokazati da u svakoj drugoj tački $x \neq 0$ ova funkcija ima izvod. $\triangle$

Definicija 1.1.2. Za funkciju $x \mapsto f(x)$ kažemo da je *diferencijabilna funkcija* u tački $x = a$ ako se njen priraštaj $f(x) - f(a)$ može predstaviti u obliku

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + o(x - a),$$

gde je A konstanta.

U stvari, to znači da je funkcija f diferencijabilna u tački $x = a$ ako njen priraštaj u tački $x = a$ ima oblik

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \omega(x)(x - a), \tag{1.1.5}$$

gde je A neka konstanta, a ω funkcija za koju je

$$\lim_{x \to a} \omega(x) = 0. \tag{1.1.6}$$

Primer 1.1.4. 1° Funkcija $x \mapsto x^2$ je diferencijabilna u tački $x = a$, jer za njen priraštaj u tački $x = a$ važi jednakost oblika

$$x^2 - a^2 = A(x - a) + o(x - a),$$

tj. jednakost

$$x^2 - a^2 = 2a(x - a) + (x - a)^2.$$

2° Funkcija $x \mapsto \sin x$ je takođe diferencijabilna u tački $x = a$ jer važi jednakost

$$\sin x - \sin a = \cos a(x - a) + \left(\frac{\sin x - \sin a}{x - a} - \cos a\right)(x - a),$$

koja je oblika

$$\sin x - \sin a = A(x - a) + \omega(x)(x - a). \quad \triangle$$

Napomenimo da je pojam diferencijabilnosti funkcije u tački $x = a$ ekvivalentan postojanju konačnog izvoda funkcije u toj tački. U stvari, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 1.1.1. *Funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in U(a))$ je diferencijabilna u tački $x = a$ ako i samo ako u tački $x = a$ ima konačan izvod $f'(a)$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je funkcija f diferencijabilna. Tada postoje konačna konstanta A i funkcija $x \mapsto \omega(x)$ koja ima osobinu (1.1.6) tako da važi jednakost (1.1.5). Ako jednakost (1.1.5) podelimo sa $x - a$, a zatim pustimo da $x \to a$, neposredno zaključujemo da važi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \lim_{x \to a} \omega(x) = A,$$

što znači da funkcija f u tački $x = a$ ima konačan izvod $f'(a) = A$.

Obrnuto, pretpostavimo sada da funkcija f ima u tački $x = a$ konačan izvod $f'(a)$, tj. neka je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Tada je

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0,$$

odakle zaključujemo da je, kada $x \to a$, funkcija $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $x \mapsto x - a$, što znači da je

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = o(x - a) \qquad (x \to a),$$

tj.

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a).$$

Ovo znači da postoji konačna konstanta $A = f'(a)$, kao i da postoji funkcija $x \mapsto \omega(x) = \dfrac{o(x - a)}{x - a}$ koja ima osobinu (1.1.6). $\square$

Primer 1.1.5. Kao što smo videli, funkcija $x \mapsto x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ ima izvod u tački $x = 2$. Ona je, dakle, u toj tački diferencijabilna.

Isto tako, funkcija $x \mapsto \sin x$ je diferencijabilna u svakoj tački, jer za svako $x = a$ ima izvod jednak $\cos a$. $\triangle$

Za funkciju koja nema izvod u nekoj tački kažemo da nije diferencijabilna u toj tački.

Primer 1.1.6. Kao što smo videli, funkcija $x \mapsto |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ nema izvod u tački $x = 0$. Prema tome, ona nije diferencijabilna u tački $x = 0$. $\triangle$

Jedna posledica osobine da je neka funkcija diferencijabilna u tački jeste sledeće tvrđenje:

Teorema 1.1.2. *Ako je $x \mapsto f(x)$ diferencijabilna funkcija u tački $x = a$, tada je f u tački a neprekidna funkcija.*

Dokaz. Tvrđenje teoreme sleduje neposredno ako se u jednakosti (1.1.5) pređe na granični proces kada $x \to a$. $\square$

Naravno, kao što smo videli u primeru 1.1.3, obrnuto tvrđenje ne važi.

Iako ćemo se nadalje, uglavnom, baviti diferencijabilnim funkcijama i njihovim osobinama, ovde ćemo razmotriti i slučaj kada funkcija $x \mapsto f(x)$ $(x \in U(a))$ nije diferencijabilna u tački $x = a$, tj. slučaj kada granična vrednost količnika (1.1.1) ne postoji. To je, u stvari, slučaj kada za granične vrednosti

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1.1.7}$$

važi jedna od tri mogućnosti:

1° obe granične vrednosti postoje, ali se razlikuju;

2° jedna od njih ne postoji;

3° nijedna od njih ne postoji.

U slučaju 1° kažemo da postoje *levi* i *desni izvod funkcije* f u tački $x = a$, označavajući ih redom sa $f'_-(a)$ i $f'_+(a)$.

Dakle,

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{i} \quad f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Primer 1.1.7. U tački $x = 0$, funkcija $x \mapsto f(x) = |x|$ ima izvode $f'_-(0) = -1$ i $f'_+(0) = 1$. $\triangle$

U slučaju 2° kažemo da funkcija f ima u tački $x = a$ levi ili desni izvod, prema tome koja od graničnih vrednosti (1.1.7) postoji.

Primer 1.1.8. Funkcija

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & (x \le 0), \\ x \sin(1/x) & (x > 0), \end{cases}$$

ima levi izvod u tački $x = 0$,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$