to konačno dobijamo

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) \equiv 0. \tag{2.69}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) = \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{j}+ \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k} = \\
&\quad = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{j}+ \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

d)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = ?$$

Neka je

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k},$$

odakle, prema definiciji (2.46) na str. 92, za $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \\
\Rightarrow \operatorname{rot}\mathbf{v} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k} \equiv \mathbf{a},
\end{aligned} \tag{2.70}$$

gde smo uveli sledeće oznake:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\equiv a_1,\ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\equiv a_2,\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\equiv a_3.$$

Dalje, kako je

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z},$$

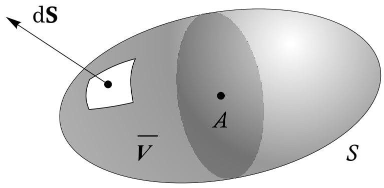
to konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \\
&\quad = \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}\right) \\
&\quad \equiv 0.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

2.2.7 Prostorno diferenciranje

Postupak uopštavanja izvoda u pravcu, naziva se **prostorno diferenciranje**, a rezultat do koga ovaj postupak dovodi naziva se **prostorni izvod**.

Posmatrajmo neku funkciju $\varphi(\mathbf{r})$ koja može da bude skalarna ili vektorska funkcija položaja.



Slika 2.10:

Uočimo u polju ove funkcije neku tačku A i jednu oblast $\overline{V}$ (deo prostora) ograničenu zatvorenom orijentisanom površi S, tako da $A \in \overline{V}$. Neka je

$$\mathrm{mes}\overline{V} = V \tag{2.72}$$

merni broj zapremine ove oblasti, a d**S** vektorski površinski element na zatvorenoj orijentisanoj površi S. Pretpostavimo dalje, da je φ integrabilna funkcija na površi S, tj. postoji integral po zatvorenoj površi S

$$I = \iint\limits_S \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}. \tag{2.73}$$

Ovaj integral može da bude skalarna ili vektorska funkcija veličine V, oblasti $\overline{V}$, koju ograničava zatvorena površ S.

Posmatrajmo sada veličinu I/V i pustimo da se površina "steže" oko fiksne tačke A, tj. neka $V \to 0$. Sada se postavlja pitanje postojanja i određivanja granične vrednosti količnika I/V.

Definicija.

Prostornim izvodom funkcije $\varphi(\mathbf{r})$ nazivamo graničnu vrednost

$$\lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r}) \circ \mathrm{d}\mathbf{S}}{V}, \tag{2.74}$$

ako ona postoji.

Ako je $\varphi(\mathbf{r})$ skalarna funkcija položaja, tada je $\varphi(\mathbf{r})\circ\mathrm{d}\mathbf{S}$ vektor, pa je i prostorni izvod vektor, koji označavamo sa

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}. \tag{2.75}$$

Može da se dokaže da ova veličina predstavlja već definisani **gradijent**

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \varphi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}. \tag{2.76}$$

Ako je $\varphi(\mathbf{r})$ vektorska funkcija položaja

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}), \tag{2.77}$$

tada, prema kružić–proizvodu, razlikujemo dva slučaja.

U prvom, gde kružić–proizvod predstavlja skalarni proizvod, proizvod $\mathbf{v}\circ\mathrm{d}\mathbf{S}$ predstavlja skalar, pa je i prostorni izvod skalar, označen sa

$$\nabla\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{2.78}$$

koji zovemo **divergencija**.

U drugom slučaju, gde kružić–proizvod predstavlja vektorski proizvod, proizvod $\mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{S}$ predstavlja vektor, pa je odgovarajući prostorni izvod vektor, koji označavamo sa:

$$\nabla\times\mathbf{v} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} \tag{2.79}$$

i definiše veličinu koju zovemo **rotor**.

Iz prethodnih definicija: *gradijenta*, *divergencije* i *rotora*, sledi njihova nezavisnost od izbora koordinatnog sistema, što smo napomenuli pri njihovoj definiciji u prethodnom poglavlju.

Divergencija i rotor vektorske funkcije konstantnog pravca

Od posebnog je interesa nalaženje izraza za divergenciju vektorske funkcije konstantnog pravca. Posmatrajmo takav jedan vektor $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = c\,\mathbf{c}_0, \quad \text{gde je } \mathbf{c}_0 \text{ jedinični vektor konstantnog pravca.} \tag{2.80}$$

Dalje, po definiciji je:

$$\operatorname{div}\mathbf{c} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathbf{c}\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S c\,\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}\cdot\mathbf{c}_0 = \operatorname{grad}c\cdot\mathbf{c}_0. \tag{2.81}$$

Koristeći ovu relaciju možemo da napišemo analitički izraz za divergenciju u pravouglom koordinatnom sistemu.

Posmatrajmo neku vektorsku funkciju, izraženu na jedan od načina [10]

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i = v_i\mathbf{e}_i. \tag{2.82}$$

[10] Napomenimo da smo pri pisanju ovog izraza koristili konvenciju o sabiranju, prema kojoj je $\sum_{i=1}^{3} v_i\mathbf{e}_i \equiv v_i\mathbf{e}_i$, odnosno vrši se sabiranje po ponovljenim indeksima.

Prema gornjoj relaciji imamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{v} &= \operatorname{div}(v_x\mathbf{i}) + \operatorname{div}(v_y\mathbf{j}) + \operatorname{div}(v_z\mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{i}\cdot \operatorname{grad} v_x + \mathbf{j}\cdot \operatorname{grad} v_y + \mathbf{k}\cdot \operatorname{grad} v_z = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i\cdot \operatorname{grad} v_i \equiv \mathbf{e}_i\cdot \operatorname{grad} v_i.\end{aligned} \tag{2.83}$$

Kako je

$$\operatorname{grad} v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v_i}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial v_i}{\partial z}\mathbf{k}, \quad i = x, y, z \tag{2.84}$$

to konačno dobijamo

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{2.85}$$

Dakle, isti izraz kao i u prethodnom poglavlju za pravougle Dekartove koordinate.

I u slučaju rotora korisno je izračunati ga za vektor konstantnog pravca:

$$\mathbf{c} = c\,\mathbf{c}_0, \quad c = |\mathbf{c}|, \quad \mathbf{c}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const.}} \tag{2.86}$$

Iz definicije rotora dobijamo:

$$\operatorname{rot}\mathbf{c} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{c}}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint_S c\mathrm{d}\mathbf{S}}{V}\times\mathbf{c}_0 = \operatorname{grad} c\times\mathbf{c}_0. \tag{2.87}$$

Ako ovo primenimo na neku vektorsku funkciju

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}, \tag{2.88}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= (\operatorname{grad} a_x\times\mathbf{i}) + (\operatorname{grad} a_y\times\mathbf{j}) + (\operatorname{grad} a_z\times\mathbf{k}) = \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{2.89}$$

dakle isto kao i u prethodnom poglavlju, za Dekartove koordinate.

2.2.8 Integralne teoreme

U ovom delu navešćemo nekoliko teorema (Stoksova [11], Grinova [12], Gausova [13]) koje se veoma često koriste u integralnom računu i njegovoj primeni. [14]

Stoksova teorema

Ako su projekcije $v_x(x,y,z)$, $v_y(x,y,z)$ i $v_z(x,y,z)$, neke vektorske funkcije $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, neprekidne, kao i njihovi odgovarajući parcijalni izvodi, na površi S, koja je zatvorena prostornom krivom C, tada je

$$\oint\limits_C \mathbf{v}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \left(= \iint\limits_S (\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_S \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \right), \tag{2.90}$$

gde je $\mathbf{n}$ jedinični vektor normale na posmatranu površ.

Grinova teorema

Ako za skalarnu funkciju Φ postoji linijski integral po zatvorenoj liniji C i ako je $\mathrm{grad}\Phi$ neprekidna funkcija, u toj oblasti S ograničenoj krivom C, tada je:

$$\oint\limits_C \Phi\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint\limits_S (\mathbf{n}\times\nabla\Phi)\,\mathrm{d}S \left(= \iint\limits_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\nabla\Phi \right). \tag{2.91}$$

Gausova teorema

Ako za vektorsku funkciju $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ postoji površinski integral po zatvorenoj površi S, koja predstavlja granicu oblasti V, i ako je $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ neprekidna funkcija, u toj oblasti, tada je

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \left(= \iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \right). \tag{2.92}$$

Ova teorema poznata je i kao teorema o divergenciji ili teorema Gaus– Ostrogradskog [15].

[11] Stokes, George Gabriel (1819–1903), irski matematičar i fizičar. Poznat je po svojim prilozima teoriji beskonačnih redova kao i prilozima u mehanici fluida (Navier-Stokes-ove jednačine), geodeziji i optici.

[12] Green, George (1793-1841), engleski matematičar. Njegov rad odnosi se na teoriju potencijala u vezi da elekticitetom i magnetizmom, zatim na oscilacije, talase i teoriju elastičnosti.

[13] Gauss, Carl Friedrich (1777–1855), veliki nemački matematičar. Njegov rad je od osnovne važnosti u algebri, teoriji brojeva, diferencijalnim jednačinama, diferencijalnoj geometriji, neeuklidskoj geometriji, kompleksnoj analizi, astronomiji, geodeziji, elektromagnetizmu i teorijskoj mehanici.

[14] Dokaz ovih teorema, zbog ograničenog prostora, nije dat, a zbog njihove važnosti navodimo ih.

[15] Остроградский, Михаил Васильевич (1801-1862). Poznati ruski matematičar i mehaničar.

Teorema o srednjoj vrednosti

1. Ako je $f(x,y)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u x,y ravni, tada postoji bar jedna tačka $(x_o,y_o) \in \sigma$ takva da je $\iint\limits_\sigma f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o,y_o)\cdot P$, gde je P površina oblasti σ.
2. Ako je $f(x,y,z)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u prostoru, tada postoji bar jedna tačka $(x_o,y_o,z_o) \in \sigma$ takva da je
$$\iiint\limits_\sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o,y_o,z_o)\cdot V, \tag{2.93}$$
gde je V zapremina oblasti σ.

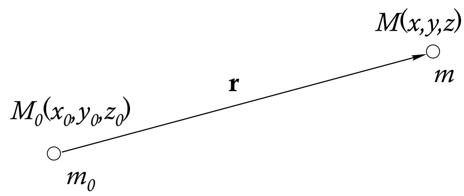
2.3 Primeri nekih polja od interesa za fiziku i tehniku

Navedimo neke primere potencijalnih polja koja su od posebnog interesa u raznim oblastima fizike i tehnike.

Privlačenje dve tačke u polju gravitacione sile

Njutnova sila gravitacije definisana je izrazom
$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{m\,m_0}{r^2}\mathbf{r}_0, \tag{2.94}$$
gde su m i m_0 mase koje se privlače, a γ je univerzalna gravitaciona konstanta.

U gornjoj relaciji uveli smo sledeće oznake (sl. 2.11):
$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{M_0M}. \tag{2.95}$$



Slika 2.11:

Pitanje je da li postoji potencijal za ovako definisanu silu? Kako su mase m i m_0, kao i γ konstantne veličine, to možemo da ih zamenimo jednom konstantom, recimo c, pa silu možemo da prikažemo u obliku
$$\mathbf{F} = -\frac{c}{r^2}\mathbf{r}_0. \tag{2.96}$$

Ranije smo pokazali (vidi str. 93) da ako postoji skalarna funkcija U, takva da je $\mathbf{F} = \text{grad}U$, tada je vektorsko polje $\mathbf{F}$ potencijalno. Dakle treba naći skalarnu funkciju $U = U(r)$. Kako je

$$\text{grad}U = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\mathbf{r}_0 \quad \text{i} \quad \mathbf{F} = -\frac{c}{r^2}\mathbf{r}_0$$

to iz uslova $\mathbf{F} = \text{grad}U$ dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{c}{r^2} \quad \text{odnosno} \quad \mathrm{d}U = -\frac{c}{r^2}\mathrm{d}r$$

odakle sledi

$$U = \frac{2c}{r} + c_1.$$

Dakle, na osnovu svega, zaključujemo da gravitaciona sila, definisana sa (2.94), može da se predstavi sa

$$\mathbf{F} = \text{grad}U, \tag{2.97}$$

tj. sila je potencijalna, a njen potencijal je određen izrazom

$$U = \frac{C}{r}. \tag{2.98}$$

Ovaj potencijal u literaturi poznat je i kao **Njutnov potencijal**. Ovde smo uzeli da je $2c = C$ i $c_1 = const. = 0$, što ne umanjuje opštost prethodno izvedenog izraza.

Pokazano je da je $\nabla(1/r) = 0$. Dakle potencijal U zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2.99}$$

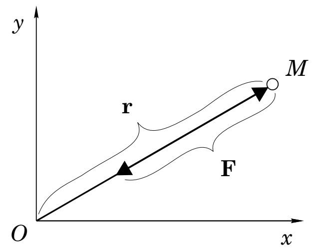
Funkcije koje zadovoljavaju Laplasovu jednačinu zovemo **harmonijske funkcije**. Dakle Njutnov potencijal je harmonijska funkcija.

Ravanski zadatak. Logaritamski potencijal

Posmatrajmo sada silu u ravni kojom neka tačka O privlači materijalnu tačku M. Pretpostavimo da je ova sila privlačenja data izrazom

$$\mathbf{F} = -\frac{2c}{r}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{2.100}$$

gde je $r = |\mathbf{r}|$ intenzitet vektora položaja $\mathbf{r}$.



Slika 2.12:

Ponovo se postavlja pitanje postojanja potencijala U za ovako definisanu silu. Slično kao i u prethodnom slučaju polazimo od:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2c}{r^2}\,x, \\
Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2c}{r^2}\,y.
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

Odavde dobijamo

$$
U = -2c\int \frac{x}{r^2}\,dx \;+\; f(y).
$$

Dalje, kako je

$$
r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{odakle sledi} \quad 2x\,\mathrm{d}x = 2r\,\mathrm{d}r,
$$

dobijamo za potencijal U

$$
U = -2c\ln r + f(y).
$$

Dalje, nađimo sada parcijalni izvod po y:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2c\ln r) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = \\
&= -2c\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -2c\,\frac{y}{r^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}.
\end{aligned}
\tag{2.102}
$$

Dakle, prema (2.101) (uslov za Y), zaključujemo da je $\frac{df}{dy} = const$. I ovde ćemo da uzmemo da je ova konstanta jednaka 0, pa dobijamo za potencijal

$$
U = -2c\ln r. \tag{2.103}
$$

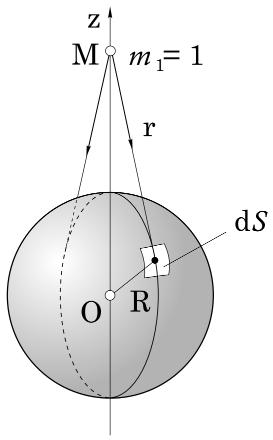
Napomenimo da u slučaju kada više tačaka privlači jednu tačku, za potencijal imamo:

$$
\begin{aligned}
U = U(x,y,z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}.
\end{aligned}
$$

Njutnova sila kojom homogena sferna ljuska privlači materijalnu tačku

Posmatrajmo sada homogenu sfernu ljusku, poluprečnika R, koja privlači materijalnu tačku (sl. 2.13). Prvo odredimo silu kojom beskonačno mali deo sfere ($\mathrm{d}S$) privlači posmatranu tačku

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{k^2 m_1 \mathrm{d}m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2.104}$$



Slika 2.13:

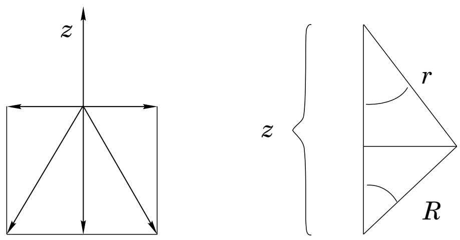
Kako je: $\mathrm{d}m_2 = \varrho \mathrm{d}V = \varrho \cdot d \cdot \mathrm{d}S$, za jediničnu debljinu $d = 1$ dobijamo $\mathrm{d}m_2 = \varrho \mathrm{d}S$. Kroz posmatranu tačku M i centar sfere O uvek možemo da postavimo jednu pravu. Neka u našem slučaju to bude z – osa, tj. $\overline{OM} = z$. Dalje, označimo sa r – rastojanje između tačke M i središta površine $\mathrm{d}S$ (tačke u kojoj deluje sila privlačenja). Ovo rastojanje je, prema slici (primena kosinusne teoreme)

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta. \tag{2.105}$$

Sada za intenzitet sile dobijamo

$$\mathrm{d}F = \frac{k^2 m_1 \varrho \mathrm{d}S}{R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta}. \tag{2.106}$$

Projektujući ovu silu na z – osu, a vodeći računa o simetriji, zapažamo da se projekcije na normalan pravac, upravno na z, poništavaju, pa treba voditi računa samo o Z – projekciji (videti sl. 2.14)



Slika 2.14:

$$dZ = -dF \cdot \cos\beta. \tag{2.107}$$

Dalje, iz relacije: $z = r\,\cos\beta + R\,\cos\theta$ (vidi sliku 2.14), dobijamo

$$\cos\beta = \frac{z - R\,cos\theta}{r}, \tag{2.108}$$

tako da konačno dobijamo za projekciju elementarne sile dF na $z-$ osu

$$\begin{aligned} dZ &= -\frac{k^2 m_1 \varrho dS}{R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta} \cdot \frac{z - R\,\cos\theta}{r} = \\ &= -\frac{k^2 m_1 \varrho dS(z - R\,\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2z\,R\,\cos\theta)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Sada ukupnu silu dobijamo integraljenjem gornjeg izraza po celoj sferi S

$$Z = -\int_S \frac{k^2 m_1 \varrho(z - R\cdot\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2R\,z\cos\theta)^{3/2}}\,dS. \tag{2.110}$$

Izrazimo sada elementarnu površinu dS u sfernim koordinatama

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta, \tag{2.111}$$

pa dobijamo izraz

$$Z = k^2 m_1 \varrho R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R\,\cos\theta - z)\cdot\sin\theta\, d\varphi d\theta}{(R^2 + z^2 - 2R\,z\,\cos\theta)^{3/2}}. \tag{2.112}$$

Dalje, kako je: $r^2 = R^2 + z^2 - 2R\,z\,\cos\theta$, pri čemu su $R-$ kao poluprečnik, i $z-$ kao rastojanje između nepokretne tačke M i centra sfere, konstantna rastojanja, to dobijamo da je: $r\,dr = R\,z\,\sin\theta\,d\theta$, odnosno

$$R\,\cos\theta - z = -\frac{r^2 + z^2 - R^2}{2z}, \tag{2.113}$$