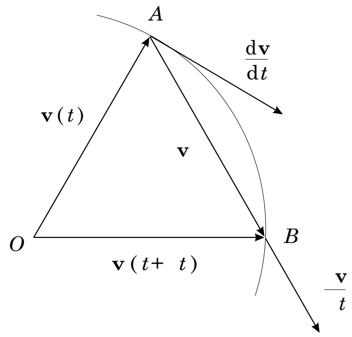


Slika 1.23: Priraštaj vektorske funkcije

Povećajmo sada vrednost skalara t za vrednost Δt. Vektor koji odgovara vrednosti skalara $t + \Delta t$ označimo sa $\mathbf{v}(t + \Delta t)$. Na slici 1.23 ovaj vektor predstavljen je orijentisanom duži $\overrightarrow{OB}$. Promena vektora $\mathbf{v}(t)$, koja odgovara priraštaju skalara t za Δt, data je razlikom

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t). \tag{1.91}$$

Sa slike 1.23 vidimo da je ova razlika, geometrijski priraštaj, predstavljena orijentisanom duži $\overrightarrow{AB}(=\Delta \mathbf{v})$.

Posmatrajmo sada vektor $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$, koji predstavlja srednju promenu veličine $\mathbf{v}$ u odnosu na parametar t. Ovako definisani vektor ima isti pravac kao i vektor $\Delta \mathbf{v}$ (Δt je skalar). Smer je isti, ako je $\Delta t > 0$, a suprotan, ako je $\Delta t < 0$.

Definicija.

Veličina definisana relacijom

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \tag{1.92}$$

zove se **izvod vektora v** (običan izvod, za razliku od izvoda u pravcu, koji će biti definisan kasnije) u odnosu na promenu skalara t, ako taj limes postoji. Ovu veličinu kratko označavamo sa $\mathbf{v}'$.

Simbolički izvod označavamo sa $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$, tako da je

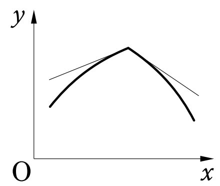
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{1.93}$$

Definicija.

Za vektorsku funkciju kažemo da je **diferencijabilna** u tački t, ako postoji prvi izvod u toj tački, tj. postoji

$$\mathbf{v}^{'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{1.94}$$

Funkcija koja je diferencijabilna je i neprekidna. Obrnuto ne važi (vidi primer na sl. 1.24).



Slika 1.24: Grafički primer neprekidne nediferencijabilne funkcije.

1.4.5 Osobine izvoda

Navedimo neke osobine izvoda:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.95}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{a}) = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{a}, \quad m = m(t), \tag{1.96}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\cdot \mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.97}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{a}\times \mathbf{b}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t}\times \mathbf{b} + \mathbf{a}\times \frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.98}$$

1.4.6 Diferencijal vektorske funkcije

Pretpostavimo da geometrijski priraštaj vektorske funkcije $\mathbf{v}(t)$ može da se predstavi u obliku:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{L}(t)\Delta t + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t), \tag{1.99}$$

pri čemu je $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)$, kada $\Delta t \to 0$, vektorska infinitezimala višeg reda u odnosu na Δt, tj.:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)}{\Delta t} = \mathbf{0}. \tag{1.100}$$

Definicija.

Diferencijal vektorske funkcije $\mathbf{v}(t)$ je linearni deo priraštaja argumenta $\mathbf{L}(t)\Delta t$, u njenom geometrijskom priraštaju. Simbolički ga označavamo sa

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{L}(t)\Delta t. \tag{1.101}$$

Za dovoljno male vrednosti priraštaja promenljive $\Delta t = \mathrm{d}t$, možemo sa diferencijalom da aproksimiramo geometrijski priraštaj funkcije $\mathbf{v}(t)$, tj.

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \approx \mathbf{L}(t)\Delta t, \tag{1.102}$$

odnosno

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t) \approx \mathrm{d}\mathbf{v}. \tag{1.103}$$

Iz (1.99) sada sledi

$$\frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{L}(t) + \frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{1.104}$$

odnosno, prema (1.100) i (1.93), dobijamo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \mathbf{L}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}'. \tag{1.105}$$

Sada (1.101) postaje

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \Delta t = \mathbf{v}' \cdot \mathrm{d}t. \tag{1.106}$$

Za dobijanje poslednje relacije (1.106) iskoristili smo definiciju izvoda (1.92) i pretpostavku da je $\Delta t = \mathrm{d}t$.

Dakle, diferencijal $\mathrm{d}\mathbf{v}$ je vektor čiji je pravac pravac tangente na hodograf.

1.4.7 Izvodi i diferencijali višeg reda

Kako je izvod vektorske funkcije takođe vektorska funkcija (iste promenljive), to možemo da nađemo izvode ove funkcije, pa dobijamo za drugi izvod

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}') = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{v}''. \tag{1.107}$$

Na ovaj način možemo da dobijemo i više izvode. Kao je po definiciji $\mathbf{v}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{v}$, to za n–ti izvod dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right) = \frac{\mathrm{d}^n\mathbf{v}}{\mathrm{d}t^n} = \mathbf{v}^{(n)}, \tag{1.108}$$

pri čemu ova relacija važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

n–ti diferencijal vektorske funkcije je, prema analogiji sa (1.106), proizvod n–tog izvoda i n–tog stepena diferencijala $\mathrm{d}t$, tj.

$$\mathrm{d}^n\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(n)}\,\mathrm{d}t^n. \tag{1.109}$$

1.4.8 Parcijalni izvod vektorske funkcije više nezavisno promenljivih

Posmatrajmo sada vektorsku funkciju $\mathbf{v}$, koja zavisi od n skalarnih promenljivih t_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, tj.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \mathbf{v}(T). \tag{1.110}$$

T možemo da shvatimo kao tačku u n–dimenzionom prostoru, čije su koordinate t_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Nađimo sada priraštaj ove funkcije, ako se menja samo jedna od promenljivih, recimo k, a ostale promenljive su "zamrznute", tj. smatramo ih konstantnim. Priraštaj funkcije je

$$\mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k + \Delta t_k, \cdots, t_n) - \mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n). \tag{1.111}$$

Definicija.

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \frac{\mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k + \Delta t_k, \cdots, t_n) - \mathbf{v}(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_n)}{\Delta t_k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_k} \tag{1.112}$$

zove se **parcijalni izvod** vektorske funkcije $\mathbf{v}$, po promenljivoj t_k, ako ovaj postoji.

Kako je ova veličina takođe vektorska funkcija, istih promenljivih, to možemo da definišemo i više parcijalne izvode, na primer:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_i^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_i \partial t_j}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t_i^3}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t_i^2 \partial t_j}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{v}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}, \cdots \tag{1.113}$$

1.4.9 Diferencijal vektorske funkcije od n skalarnih promenljivih

Posmatrajmo vektorsku funkciju

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(T), \tag{1.114}$$

tačku $T(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ i neku drugu tačku $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Tačke A i T pripadaju n–dimenzionom Euklidskom prostoru E^n. Priraštaj funkcije $\mathbf{v}$ je

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(T) - \mathbf{v}(A) = \mathbf{v}(t_1, t_2, \cdots, t_n) - \mathbf{v}(a_1, a_2, \cdots, a_n). \tag{1.115}$$

Definicija.

Funkcija $\mathbf{v}$=$\mathbf{v}(T)$ je **diferencijabilna** funkcija u tački A, ako njen priraštaj može da se prikaže u obliku

$$\Delta\mathbf{v} = [\mathbf{p}_1(T)\,(t_1 - a_1) + \cdots + \mathbf{p}_n(T)\,(t_n - a_n)] + \boldsymbol{\omega}(T)\cdot\,\varrho(T,A), \qquad (1.116)$$

gde je $\varrho(T,A)$ rastojanje između tačaka T i A (u Euklidskom prostoru)

$$\varrho = \sqrt{(t_1-a_1)^2 + (t_2-a_2)^2 + \cdots + (t_n-a_n)^2}, \qquad (1.117)$$

a $\boldsymbol{\omega}(T)$ predstavlja neprekidnu funkciju u tački A, u kojoj je

$$\lim_{T\to A}\boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}(A) = 0. \qquad (1.118)$$

Definicija.

Diferencijal vektorske funkcije $\mathbf{v}(T)$, u tački A, je linearni deo u odnosu na priraštaj promenljivih $\Delta t_i = t_i - a_i$, u izrazu za priraštaj funkcije $\Delta\mathbf{v}$, tj.

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T,A) = \mathbf{p}_1\,(t_1-a_1) + \cdots + \mathbf{p}_n\,(t_n-a_n)\,. \qquad (1.119)$$

Ako fiksiramo sve promenljive, osim k-te

$$(a_1 = t_1, \cdots, a_{k-1} = t_{k-1}, a_{k+1} = t_{k+1}, \cdots, a_n = t_n),$$

tada za rastojanje ϱ dobijamo

$$\varrho(T,A) = \sqrt{(t_k-a_k)^2} = |t_k - a_k|, \qquad (1.120)$$

pa priraštaj funkcije ima oblik:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(a_1,\cdots,a_{k-1},t_k,a_{k+1},\cdots,a_n) - \mathbf{v}(a_1,a_2\cdots,a_n) = \\ \mathbf{p}_k(t_k-a_k) + \boldsymbol{\omega}(T)\cdot|t_k-a_k|.\end{aligned} \qquad (1.121)$$

Iz poslednje relacije, uvodeći oznaku $t_k - a_k = \Delta t_k$, sledi

$$\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t_k} = \mathbf{p}_k \pm \boldsymbol{\omega}(T). \qquad (1.122)$$

pa dobijamo

$$\lim_{\Delta t_k\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t_k} = \mathbf{p}_k \pm \lim_{T\to A}\boldsymbol{\omega}(T), \qquad (1.123)$$

odnosno

$$\mathbf{p}_k = \left.\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t_k}\right|_{T=A}. \qquad (1.124)$$

Sada možemo da napišemo i izraz za diferencijal (1.119) u jednom od oblika

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T, A) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_1}(t_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_n}(t_n - a_n) \tag{1.125}$$

ili, ako je $t_i - a_i = \Delta t_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T, A) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_1}\Delta t_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_n}\Delta t_n \tag{1.126}$$

ili, za $\Delta t_i = \mathrm{d}t_i$

$$\mathrm{d}\mathbf{v}(T, A) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_1}\mathrm{d}t_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_n}\mathrm{d}t_n. \tag{1.127}$$

Izraz (1.127) naziva se **totalni diferencijal** funkcije $\mathbf{v}$, a izraz

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.128}$$

parcijalni diferencijal.

1.5 Integracija

1.5.1 Neodređeni integral vektorske funkcije

U prethodnom poglavlju definisali smo operaciju diferenciranja vektorske funkcije. Dakle, ako imamo neku vektorsku funkciju, recimo $\mathbf{a}$, tada, prema definiciji (1.92), možemo da nađemo njen izvod. Međutim, često je potrebno obrnuto: ako imamo izvod neke vektorske funkcije da nađemo samu funkciju. U tom cilju definisaćemo sledeće pojmove.

Neka je $\mathbf{a}(t)$ neprekidna vektorska funkcija skalarnog argumenta t.

Definicija.

Primitivna funkcija funkcije $\mathbf{a}(t)$ je funkcija $\mathbf{b}(t)$ čiji je izvod

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{b}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}. \tag{1.129}$$

Međutim, kako je izvod konstantnog vektora jednak nuli, tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}, \tag{1.130}$$

to, ako je $\mathbf{b}(t)$ jedna primitivna funkcija neprekidne funkcije $\mathbf{a}(t)$, imamo neograničen skup primitivnih funkcija od kojih se svaka, iz posmatranog skupa, razlikuje od $\mathbf{b}(t)$ samo za vektorsku konstantu $\mathbf{c}$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}. \tag{1.131}$$

Definicija.

Neodređeni integral vektorske funkcije **a** je skup svih njenih primitivnih funkcija, a obeležavamo ga sa

$$\int \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \mathbf{b} + \mathbf{c}. \tag{1.132}$$

Kako **a** možemo da predstavimo relacijom

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}, \tag{1.133}$$

to se neodređeni integral vektorske funkcije svodi na neodređene integrale skalarnih funkcija

$$\int \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \left(\int a_x\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{i} + \left(\int a_y\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{j} + \left(\int a_z\,\mathrm{d}t\right)\mathbf{k}. \tag{1.134}$$

1.5.2 Određeni integral

Neka je **a** ograničena funkcija parametra t, na intervalu $(t_A,\, t_B)$. Podelimo sada ovaj interval, na proizvoljan način, na konačan broj delova

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \tag{1.135}$$

tačkama

$$t_A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_B. \tag{1.136}$$

Formirajmo sada zbir (sumu) (koji se često zove integralna suma)

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\tau_i)(t_i - t_{i-1}), \tag{1.137}$$

gde $\tau_i \in (t_{i-1},\, t_i)$.

Definicija.

Ako postoji granična vrednost zbira **I**, kada n neogranično raste, pri čemu najveći od delova Δt_i teži nuli, i to za proizvoljnu podelu intervala $(t_0,\, t_n)$, tada se ta granična vrednost naziva **određeni integral** (u Rimanovom smislu) funkcije **a**

$$\lim_{max|\Delta t_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\tau_i)\Delta t_i = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{a}\,\mathrm{d}t. \tag{1.138}$$

Napomenimo da pored Rimanovog [16] postoje i Stieltjesov, Lebegov i drugi integrali.

Prema Njutn[17]– Lajbnicovoj[18] relaciji je

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \mathbf{b}\,\Big|_{t_A}^{t_B} = \mathbf{b}(t_B) - \mathbf{b}(t_A), \tag{1.139}$$

ako je $\mathbf{b}$ primitivna funkcija funkcije $\mathbf{a}$.

1.5.3 Krivolinijski integral vektorske funkcije

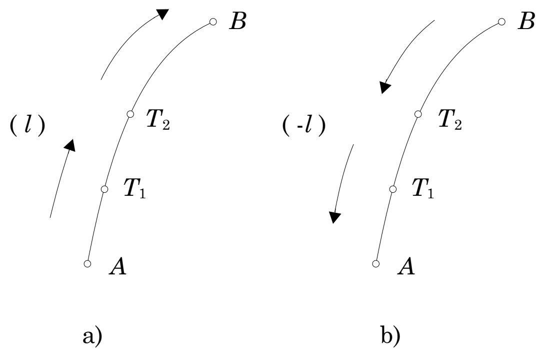
Prethodno definisane integrale možemo da shvatimo kao integraciju čija je oblast integracije prava linija ili jedan njen deo. Međutim, slično kao i kod skalarnih funkcija i u slučaju vektorskih funkcija, prirodno uopštenje je proširenje integracije na krive linije, površi, zapremine.

Orijentacija krive

Posmatrajmo ograničenu krivu u prostoru, zadatu vektorskom jednačinom:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [t_A, t_B]. \tag{1.140}$$

Orijentisati krivu znači odrediti koja je od dve posmatrane proizvoljne tačke, sa krive, prethodna, a koja sledi.



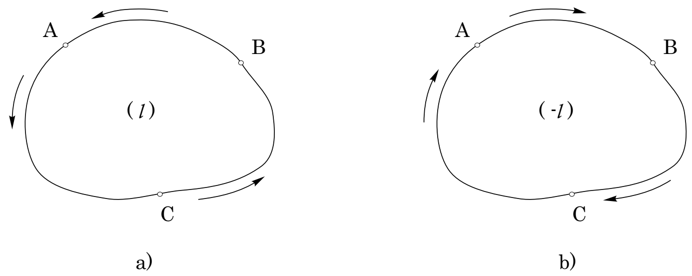
Slika 1.25: Orijentacija krivih

[16] Bernhard Riemann (1826-1866), veliki nemački matematičar. Dao je značajne doprinose u geometriji, analizi, teoriji diferencijalnih jednačina i teoriji brojeva.

[17] Newton, Sir Isaac (1642–1727), veliki engleski fizičar i matematičar. Zajedno sa Lajbnicom (nezavisno jedan od drugog) uveo diferencijalni i integralni račun. Postavio mnoge osnovne zakone u fizici i metode istraživanja problema u fizici, korišćenjem matematičke analize. Njegova knjiga *Mathematical Principles of Natural Philosophy, 1687. god.* predstavlja izuzetan doprinos klasičnoj mehanici. Njegov rad je od velike važnosti i za matematiku i za fiziku.

[18] Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), nemački matematičar i filozof. Zajedno sa Njutnom, uveo diferencijalni i integralni račun.

Da bismo to uradili, posmatrajmo dve različite tačke, T_1 i T_2 sa krive l. Ove tačke određene su vrednostima parametra t_1 i t_2 ($t_1 < t_2$) i možemo da smatramo da je tačka T_1 prethodna, a T_2 sledeća. Tada imamo jednu orijentaciju (sl. 1.25a). Međutim, možemo da posmatramo i obrnuto, da je T_2 prethodna, a T_1 sledeća ($t_2 < t_1$), pa imamo drugu orijentaciju (sl. 1.25b). Orijentacija zatvorene krive, za koju je $\mathbf{r}(t_A) = \mathbf{r}(t_B)$, što znači da se tačke A i B, koje odgovaraju vrednostima parametra t_A i t_B, respektivno, poklapaju, određuje se posmatrajući tri tačke sa zatvorene krive i vršimo orijentaciju na jedan od dva prikazana načina na slikama 1.26. Redosled ABC je jedna orijentacija, a redosled ACB druga, suprotna orijentacija.



Slika 1.26: Orijentacija zatvorenih krivih

Podela orijentisane krive

Pod podelom orijentisane krive podrazumevamo podelu pri kojoj su tačke podele krive ($l = AB$)

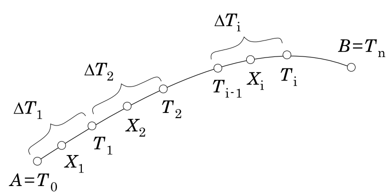
$$A = T_0, T_1, \ldots, T_n = B \tag{1.141}$$

numerisane u poretku po kome slede jedna za drugom (sl. 1.27), odnosno odgovaraju vrednostima parametra

$$t_0, t_1, \ldots, t_n, \tag{1.142}$$

pri čemu je za usvojenu orijentaciju

$$t_A = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_B. \tag{1.143}$$



Slika 1.27: Podela orijentisane krive