Teorema o srednjoj vrednosti

1. Ako je $f(x,y)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u x,y ravni, tada postoji bar jedna tačka $(x_o,y_o)\in\sigma$ takva da je $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o,y_o)\cdot P$, gde je P površina oblasti σ.
2. Ako je $f(x,y,z)$ neprekidna funkcija, na zatvorenoj i ograničenoj oblasti σ u prostoru, tada postoji bar jedna tačka $(x_o,y_o,z_o)\in\sigma$ takva da je
$$\iiint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = f(x_o,y_o,z_o)\cdot V, \tag{2.93}$$
gde je V zapremina oblasti σ.

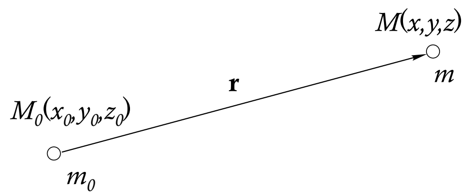
2.3 Primeri nekih polja od interesa za fiziku i tehniku

Navedimo neke primere potencijalnih polja koja su od posebnog interesa u raznim oblastima fizike i tehnike.

Privlačenje dve tačke u polju gravitacione sile

Njutnova sila gravitacije definisana je izrazom
$$\mathbf{F} = -\gamma\frac{m\,m_0}{r^2}\mathbf{r}_0, \tag{2.94}$$
gde su m i m_0 mase koje se privlače, a γ je univerzalna gravitaciona konstanta.

U gornjoj relaciji uveli smo sledeće oznake (sl. 2.11):
$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{gde je} \quad \mathbf{r} = \overrightarrow{M_0M}. \tag{2.95}$$



Slika 2.11:

Pitanje je da li postoji potencijal za ovako definisanu silu? Kako su mase m i m_0, kao i γ konstantne veličine, to možemo da ih zamenimo jednom konstantom, recimo c, pa silu možemo da prikažemo u obliku
$$\mathbf{F} = -\frac{c}{r^2}\mathbf{r}_0. \tag{2.96}$$

Ranije smo pokazali (vidi str. 93) da ako postoji skalarna funkcija U, takva da je $\mathbf{F} = \mathrm{grad}U$, tada je vektorsko polje $\mathbf{F}$ potencijalno. Dakle treba naći skalarnu funkciju $U = U(r)$. Kako je

$$\mathrm{grad}U = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\mathbf{r}_0 \quad \mathrm{i} \quad \mathbf{F} = -\frac{c}{r^2}\mathbf{r}_0$$

to iz uslova $\mathbf{F} = \mathrm{grad}U$ dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{c}{r^2} \quad \text{odnosno} \quad \mathrm{d}U = -\frac{c}{r^2}\mathrm{d}r$$

odakle sledi

$$U = \frac{2c}{r} + c_1.$$

Dakle, na osnovu svega, zaključujemo da gravitaciona sila, definisana sa (2.94), može da se predstavi sa

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}U, \tag{2.97}$$

tj. sila je potencijalna, a njen potencijal je određen izrazom

$$U = \frac{C}{r}. \tag{2.98}$$

Ovaj potencijal u literaturi poznat je i kao **Njutnov potencijal**. Ovde smo uzeli da je $2c = C$ i $c_1 = const. = 0$, što ne umanjuje opštost prethodno izvedenog izraza.

Pokazano je da je $\nabla(1/r) = 0$. Dakle potencijal U zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2.99}$$

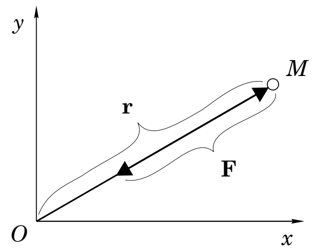
Funkcije koje zadovoljavaju Laplasovu jednačinu zovemo **harmonijske funkcije**. Dakle Njutnov potencijal je harmonijska funkcija.

Ravanski zadatak. Logaritamski potencijal

Posmatrajmo sada silu u ravni kojom neka tačka O privlači materijalnu tačku M. Pretpostavimo da je ova sila privlačenja data izrazom

$$\mathbf{F} = -\frac{2c}{r}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{2.100}$$

gde je $r = |\mathbf{r}|$ intenzitet vektora položaja $\mathbf{r}$.



Slika 2.12:

Ponovo se postavlja pitanje postojanja potencijala U za ovako definisanu silu. Slično kao i u prethodnom slučaju polazimo od:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2c}{r^2}\,x, \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2c}{r^2}\,y. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Odavde dobijamo

$$U = -2c\int \frac{x}{r^2}\,dx + f(y).$$

Dalje, kako je

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{odakle sledi} \quad 2x\,\mathrm{d}x = 2r\,\mathrm{d}r,$$

dobijamo za potencijal U

$$U = -2c\ln r + f(y).$$

Dalje, nađimo sada parcijalni izvod po y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2c\ln r) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = \\ &= -2c\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = -2c\,\frac{y}{r^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Dakle, prema (2.101) (uslov za Y), zaključujemo da je $\frac{df}{dy} = const$. I ovde ćemo da uzmemo da je ova konstanta jednaka 0, pa dobijamo za potencijal

$$U = -2c\ln r. \tag{2.103}$$

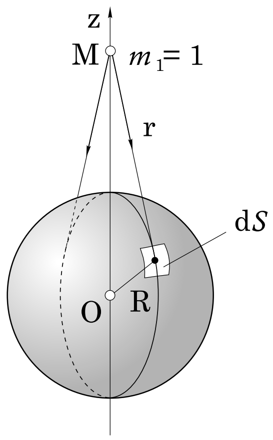
Napomenimo da u slučaju kada više tačaka privlači jednu tačku, za potencijal imamo:

$$\begin{aligned} U = U(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}. \end{aligned}$$

Njutnova sila kojom homogena sferna ljuska privlači materijalnu tačku

Posmatrajmo sada homogenu sfernu ljusku, poluprečnika R, koja privlači materijalnu tačku (sl. 2.13). Prvo odredimo silu kojom beskonačno mali deo sfere ($\mathrm{d}S$) privlači posmatranu tačku

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{k^2 m_1 \mathrm{d}m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{2.104}$$



Slika 2.13:

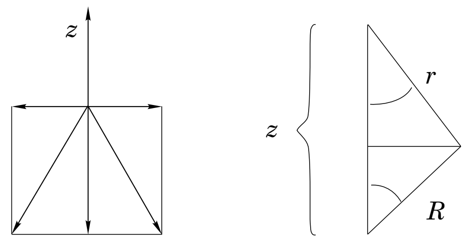
Kako je: $\mathrm{d}m_2 = \varrho \mathrm{d}V = \varrho \cdot d \cdot \mathrm{d}S$, za jediničnu debljinu $d = 1$ dobijamo $\mathrm{d}m_2 = \varrho \mathrm{d}S$. Kroz posmatranu tačku M i centar sfere O uvek možemo da postavimo jednu pravu. Neka u našem slučaju to bude z – osa, tj. $\overline{OM} = z$. Dalje, označimo sa r – rastojanje između tačke M i središta površine $\mathrm{d}S$ (tačke u kojoj deluje sila privlačenja). Ovo rastojanje je, prema slici (primena kosinusne teoreme)

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta. \tag{2.105}$$

Sada za intenzitet sile dobijamo

$$\mathrm{d}F = \frac{k^2 m_1 \varrho \mathrm{d}S}{R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta}. \tag{2.106}$$

Projektujući ovu silu na z – osu, a vodeći računa o simetriji, zapažamo da se projekcije na normalan pravac, upravno na z, poništavaju, pa treba voditi računa samo o Z – projekciji (videti sl. 2.14)



Slika 2.14:

$$\mathrm{d}Z = -\mathrm{d}F \cdot \cos\beta. \tag{2.107}$$

Dalje, iz relacije: $z = r\,\cos\beta + R\,\cos\theta$ (vidi sliku 2.14), dobijamo

$$\cos\beta = \frac{z - R\,cos\theta}{r}, \tag{2.108}$$

tako da konačno dobijamo za projekciju elementarne sile $\mathrm{d}F$ na $z-$ osu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z &= -\frac{k^2 m_1 \varrho \mathrm{d}S}{R^2 + z^2 - 2\,z\,R\,\cos\theta} \cdot \frac{z - R\,\cos\theta}{r} = \\ &= -\frac{k^2 m_1 \varrho dS(z - R\,\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2z\,R\,\cos\theta)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Sada ukupnu silu dobijamo integraljenjem gornjeg izraza po celoj sferi S

$$Z = -\int_S \frac{k^2 m_1 \varrho (z - R\cdot\cos\theta)}{(R^2 + z^2 - 2R\,z\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}S. \tag{2.110}$$

Izrazimo sada elementarnu površinu $\mathrm{d}S$ u sfernim koordinatama

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta, \tag{2.111}$$

pa dobijamo izraz

$$Z = k^2 m_1 \varrho R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R\,\cos\theta - z)\cdot\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{(R^2 + z^2 - 2R\,z\,\cos\theta)^{3/2}}. \tag{2.112}$$

Dalje, kako je: $r^2 = R^2 + z^2 - 2R\,z\,\cos\theta$, pri čemu su $R-$ kao poluprečnik, i $z-$ kao rastojanje između nepokretne tačke M i centra sfere, konstantna rastojanja, to dobijamo da je: $r\,\mathrm{d}r = R\,z\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$, odnosno

$$R\,\cos\theta - z = -\frac{r^2 + z^2 - R^2}{2z}, \tag{2.113}$$

pa je:

$$\int_0^{\pi} \frac{(R\cos\theta - z)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{3/2}} = -\frac{1}{2Rz^2}\int_{|z-R|}^{z+R}\left(1+\frac{z^2-R^2}{r^2}\right)\mathrm{d}r = \tag{2.114}$$
$$= -\frac{1}{2Rz^2}\left[r - \frac{z^2-R^2}{r}\right]_{|z-R|}^{z+R}.$$

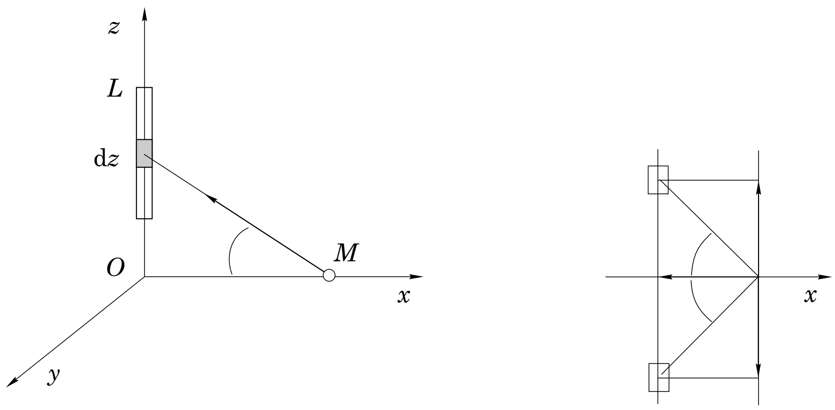
Analizirajmo sada ovaj rezultat. Kako za $\theta = 0 \Rightarrow r = |z-R|$, to treba razlikovati dva slučaja. **Prvi**, kada je **tačka van sfere** tada je $z > R$, pa je $|z-R| = z-R$, odakle sledi da je:

$$Z = -\frac{k^2\, m_1\, 4\pi\, R^2\rho}{z^2} = -\frac{k^2 m_1 m_2}{z^2}. \tag{2.115}$$

Ovde smo iskoristili da je zapremina sfere, jedinične debljine: $V = 4\pi R^2\cdot d = 4\pi R^2$, gde je d – debljina koja je jednaka 1, pa je masa $m_2 = \varrho V = 4\pi\,\varrho\, R^2$. I **drugi** slučaj, kada je **tačka u unutrašnosti** sfere. U ovom slučaju je $z < R$, pa je $|z-R| = R-z$, odakle sledi da je $Z = 0$.

Privlačenje tačke od strane linijskog tela

Odredimo potencijal homogene prave L, koja se poklapa sa z – osom. Kako posmatrana tačka M i data prava L određuju jednu ravan, uzmimo da je to xOz ravan, videti sl. 2.15.



Slika 2.15:

Prvo odredimo silu kojom prava privlači tačku. Elementarna sila je:

$$|\mathrm{d}\mathbf{F}| = k\frac{\mathrm{d}z}{r^2} = k\frac{\mathrm{d}z}{x^2+z^2}. \tag{2.116}$$

Napomenimo da smo pošli od uslova da je sila proporcionalna masama, a obrnuto proporcionalana kvadratu rastojanja. Međutim, kako je $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}V = \varrho P\,\mathrm{d}z$

i $P = 1$, to smo dobili da sila zavisi od dz, dok smo sve ostale konstante označili jednim slovom – k. Dalje, slično kao i u prethodnom primeru, zbog simetričnosti projekcija, videti sl. 2.15, ponovo je potrebno odrediti samo X – projekciju

$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}F\,\cos\alpha = -k\frac{\mathrm{d}z}{r^2}\cdot\frac{x}{r}. \tag{2.117}$$

Ukupna projekcija je

$$X = -\int_{-\infty}^{+\infty} k\frac{x}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{r^2}. \tag{2.118}$$

Dalje, kako je

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow z = x\,\mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{x}{\cos^2\alpha}d\alpha, \quad x = const, \tag{2.119}$$

i

$$r^3 = (x^2+z^2)^{3/2} = x^3(1+\mathrm{tg}^2\alpha)^{3/2} = \frac{x^3}{\cos^3\alpha}, \tag{2.120}$$

to za X dobijamo

$$X = -k\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos^3\alpha}{x^3}\frac{x}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{2.121}$$

Kako je $x = const$, to dobijamo

$$X = -k\frac{1}{x}\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{2k}{x}. \tag{2.122}$$

Sada možemo da potražimo potencijal. Ako postoji potencijal U, on mora da zadovoljava relaciju

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2k}{x}, \tag{2.123}$$

odakle konačno dobijamo:

$$U = -2k\ln x \quad \text{ili} \quad U = 2k\ln\frac{1}{x}. \tag{2.124}$$

Teorema 6 *Proizvoljno vektorsko polje* $\mathbf{F}$*, jednoznačno, neprekidno i ograničeno, može da se razloži na zbir potencijalnog i bezvrtložnog vektorskog polja u obliku:*

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla\times\mathbf{A},$$

pri čemu je $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$.

Skalarnu funkciju U – nazivamo **skalarni potencijal**, a vektorsku $\mathbf{A}$ – **vektorski potencijal** vektorskog polja $\mathbf{F}$.

Ova teorema poznata je u literaturi kao teorema Helmholca. [16] Teoremu smo naveli zbog njene važnosti. Međutim, kako je dokaz relativno složen, nećemo da ga izložimo, već čitaoca upućujemo na reference: [4] (str. 79), [29] (str. 50).

[16] Hermann von Helmholtc (1821–1894), nemački fizičar. Poznat je po veoma važnim radovima iz oblasti termodinamike, hidrodinamike i akustike.

2.4 Generalisane koordinate

Položaj tačke u trodimenzionom Euklidskom prostoru određuje se, u odnosu na jednu unapred određenu tačku O, koju zovemo pol ili koordinatni početak, pomoću *vektora položaja* $\mathbf{r}$. U odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata $Oxyz$, sa početkom u polu O, položaj tačke se određuje *koordinatama tačke* (x, y, z). Ortogonalne projekcije kraja vektora položaja na ose ovog koordinatnog sistema poklapaju se sa koordinatama tačke, pa se koordinate vektora položaja $\mathbf{r}$ poklapaju sa ovim koordinatama x, y, z:

$$\mathbf{r} = \{x, y, z\} \quad \text{ili} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{2.125}$$

Međutim, položaj tačke u prostoru može da se odredi i pomoću neka tri međusobno nezavisna parametra q^1, q^2, q^3 (ovde 1,2 i 3 nisu eksponenti već oznake parametara !!!), ili kraće q^i (i=1,2,3). Kada se parametru q^i daju sve moguće vrednosti, a svakoj tački prostora odgovara jedan i samo jedan uređen skup od tri broja (q^1, q^2, q^3) i obrnuto, svakom skupu od tri broja (q^1, q^2, q^3) odgovara jedna i samo jedna tačka u prostoru (trodimenzionom), tada se *parametri* q^i nazivaju **opšte** ili **generalisane** koordinate tačke. Sada vektor položaja možemo da izrazimo i preko generalisanih koordinata:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3), \quad \text{ili kraće} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q^i). \tag{2.126}$$

Dekartove koordinate ovog vektora možemo da izrazimo u obliku:

$$\begin{aligned} x &= x(q^i), \\ y &= y(q^i), \\ z &= z(q^i). \end{aligned} \tag{2.127}$$

Iz zahteva za obostranom jednoznačnošću između tačaka u prostoru i koordinata q^i sledi da svakoj tački sa koordinatama (x, y, z) *moraju da odgovaraju* tri broja q^i, tako da je:

$$q^i = q^i(x, y, z), \qquad \frac{\partial(q^1, q^2, q^3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0. \tag{2.128}$$

Dakle, jednačine (2.127) uvek zadovoljavaju uslove potrebne da mogu da se reše po q^i.

Skup jednačina (2.127) i (2.128) predstavljaju jednačine koordinatne transformacije. Ove transformacije su uzajamno recipročne – inverzne. Definišimo sada kordinatne linije i koordinatne površi.

> *Definicija.*
>
> **Kordinatne linije** –predstavljaju geometrijsko mesto tačaka koje se dobija ako su dve koordinate konstantne, a treća se menja.

Koordinatne linije mogu da budu prave ili krive i u zavisnosti od toga govorimo o pravolinijskim ili krivolinijskim koordinatnim sistemima (slika 2.16).