3. DETERMINANTA JE LINEARNO-HOMOGENA FUNKCIJA SVAKOG SVOJEG VEKTORA (STUPCA)

3.1. Lema. *Pomnoži li se neki stupac determinante nekim izrazom, množi se tim izrazom i sama determinanta.*

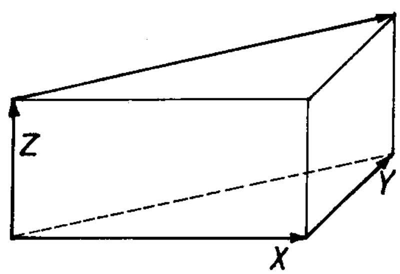
Geometrijski: Ako u nekom kvadru jedan osnovni brid pomnožimo sa c, pomnoži se sa c i mjera kvadra.

Dokaz. Neka je npr. $b_{.1}=c\cdot a_{.1}$, $b_{.j}=a_{.j}$ za $j>1$; tada svaki član u $\det b$ sadrži kao faktor: c kao i jedan član od $\det a$; dakle je $\det b = c\cdot \det a$.

3.2. Lema. $\begin{vmatrix} x+x' & y \\ u+u' & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y \\ u' & v \end{vmatrix}$, tj.

ako je jedan stupac determinante suma od dva niza, tada je determinanta jednaka sumi od odgovarajuće dvije determinante koje se iz zadane dobiju tako da se odgovarajući stupac zamijeni prvim, odnosno drugim nizom. Drugim riječima: *Determinanta je aditivna funkcija svakog svojeg vektora.* Geometrijski:

$$\mathrm{Pl}(\vec{x}, \vec{z}) + \mathrm{Pl}(\vec{y}, \vec{z}) = \mathrm{Pl}(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z});$$



Sl. 11.2.

tu $\mathrm{Pl}(x, z)$ znači orijentiranu ploštinu kvadra što ga razapinju radijusvektori $\vec{x}, \vec{z}$.

Dokaz. Pa neka je matrica b takva da je npr.

$$b_{.1}=\vec{f}+\vec{g},\ b_{.j}=a_{.j} \text{ za } j=2,\ 3,\ldots;$$

pri tom su $\vec{f}, \vec{g}$ dva stupca po n članova. Permutaciji $p\in 1(n)!$ odgovara u $\det b$ član

$$b(p)=(-1)^{ip}\, b_{p_1 1}\, b_{p_2 2}\ldots, \text{ tj.}$$

$$\sum_p b(p)=\sum_p(-1)^{ip}(f_{p_1}+g_{p_1})\,b_{p_2 2}\ldots = \sum_p(-1)^{ip} f_{p_1} a_{p_2 2}\ldots +$$

$$+\sum_p(-1)^{ip}\cdot g_{p_1} a_{p_2 2}\ldots = \det[\vec{f}, a_{.2}, a_{.3}\ldots] + \det[\vec{g}, a_{.2}, a_{.3}\ldots].$$

Kombinirajući prethodna dva rezultata, imamo ovaj teorem:

3.3. Teorem. *Determinanta je homogeno-linearna funkcija svakog svojeg vektora.*

Tako npr.

$$\begin{vmatrix} 2\cdot 5-3\cdot 2, & 2, & 3 \\ 2\cdot 7-3\cdot 1, & 4, & 5 \\ 2\cdot 4-3\cdot 5, & 8, & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix}.$$

3.3.1. Primjer. Nađite determinantu produkta kvadratnih matrica tipa (2. 2). Neka su zadane matrice

$$a=\begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$ab=\begin{bmatrix} pu+qx & pv+qy \\ su+tx & sv+ty \end{bmatrix};$$

dakle je

$$\det(ab)=\begin{vmatrix} pu+qx & pv+qy \\ su+tx & sv+ty \end{vmatrix}=(\text{shvaćajući prvi stupac kao sumu})$$

$$=\begin{vmatrix} pu & pv+qy \\ su & sv+ty \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qx & pv+qy \\ tx & sv+ty \end{vmatrix}=(\text{shvaćajući druge stupce kao sume})$$

$$=\begin{vmatrix} pu & pv \\ su & sv \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} pu & qy \\ su & ty \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qx & qv \\ tx & sv \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} qx & qy \\ tx & ty \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{(izlučujući faktore iz poje-}\\ \text{dinih stupaca)}\end{array}\right.$$

$$=u\begin{vmatrix} p & p \\ s & s \end{vmatrix}v+u\begin{vmatrix} p & q \\ s & t \end{vmatrix}y+x\begin{vmatrix} q & p \\ t & s \end{vmatrix}v+x\begin{vmatrix} q & q \\ t & t \end{vmatrix}y=0+u\det a\cdot y-x\det a\cdot v+0$$

$$=\det a\cdot(uy-vx)=\det a\cdot\det b,\quad \text{tj.}\quad \det(a\cdot b)=\det a\ \det b.$$

Analogan zaključak vrijedi za konačne kvadratne matrice uopće (teorem 9.2).

4. TRI KARAKTERISTIČNA SVOJSTVA DETERMINANATA

Rezultate iz prethodna tri paragrafa možemo skupiti zajedno pa tako spoznajemo da za kvadratne konačne matrice $x=[x_{.1}, x_{.2}, \ldots]$ pridruživanje

(1) $$x\rightarrow\det x \text{ odnosno } [x_{.1}, x_{.2}, \ldots]\rightarrow\det[x_{.1}, x_{.2}, \ldots]$$

ima ova tri svojstva:

1. *Determinanta matrice je alternirajuća funkcija stupaca* (vektorâ) (vidi teorem 2.1),

2. *Determinanta matrice je homogeno-linearna funkcija od svakog svojeg vektorskog argumenta* (teorem 3.3).

3. *Determinanta jedinične matrice je* 1 (korolar 1.2).

Zanimljivo je da su ta tri svojstva *i dovoljna da okarakteriziraju funkciju* (1) *u skupu kvadratnih konačnih matrica.* (K. Weierstrass).

Stvarno, neka je a proizvoljna matrica poretka (n, n), $n\in N$; tada je

$$a=[a_{.1}, a_{.2}, a_{3}\cdots];$$

no za svaki vektor $a_{.j}$ matrice a vrijedi

$$a_{.j} = a_{1j}\,e_1 + a_{2j}\,e_2 + \cdots + a_{ij}\,e_i + \cdots,$$

gdje je

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} i.$$

Na taj način imamo ovaj prikaz matrice

(2) $$a = [a_{11}\,e_1 + a_{21}\,e_2 + \cdots + a_{i1}\,e_i + \cdots,\ a_{12}\,e_1 + a_{22}\,e_2 \cdots, \cdots].$$

Tu se pojavljuju sve vrijednosti a_{ij} matrice a. Uzmimo sada u prikazu (2) iz prvog stupca $a_{.1}$ jedan član, recimo član $a_{p_1 1}\,e_{p_1}$; neka je isto tako $a_{p_2 2}\,e_{p_2}$ jedan član u $a_{.2}$ itd. Za svaki n-član niz $p = p_1, p_2, p_3, \ldots$ brojeva iz $1\,(n)$ možemo promatrati determinantu

(3) $$|\ a_{p_1 1}\,e_{p_1},\ a_{p_2 2}\,e_{p_2}, \ldots\ |.$$

Ona je prema lemi 3.1. jednaka

(4) $$a_{p_1 1}\,a_{p_2 2} \cdots\ |\ e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots\ |.$$

No, kod nizova p možemo se ograničiti na one bez jednakih članova, jer ako u nizu $p_1, p_2, \cdots$ ima *jednakih* članova, tada je determinanta u (4) ednaka 0 (v. korolar 2.2). Ostaje, dakle, slučaj da među n brojeva $p_1, p_2, \cdots$ iz $1\,(n)$ nema jednakih; to znači da je $p \in 1\,(n)!$. Tada je očigledno

$$|\ e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots\ | = (-1)^{ip}\ |\ e_1,\ e_2,\ e_3, \cdots\ |.$$

No prema korolaru 1.2. imamo

$$|\ e_1,\ e_2 \cdots\ | = 1.$$

Na taj način determinanta, (4), odnosno (3), postaje

(5) $$(-1)^{ip}\ a_{p_1 1}\ a_{p_2 2} \cdots$$

No, prema teoremu 3.3. suma svih determinanata (3) je $= \det a$. Dakle je prema (4) i (5) zaista

(6) $$\det a = \sum_{p \in 1\,(n)!} (-1)^{ip}\, a_{p_1 1}\, a_{p_2 2} \cdots$$

A (6) je u pogl. 6, § 3. bila upravo definiciona formula za det a.

5. TRANSPONIRANJEM KVADRATNE MATRICE NE MIJENJA SE DETERMINANTA

Dosad smo ispitivali svojstva determinante u zavisnosti od njenih *stupaca*. Sad ćemo dokazati da analogna svojstva postoje i u pogledu *redaka*. Naime, transpozicijom $a \rightarrow a^T$ postaju reci ili redići stupcima, a stupci rečima. Pri tom, općenito, ***matrica se mijenja***; naprotiv, ***determinanta se ne mijenja***. Dokazat ćemo, naime, da vrijedi

—→ **5.1.** Teorem

$$\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix},$$

tj. $\det a = \det a^T$ za matricu poretka (2, 2). Općenitije, *za svaku konačnu kvadratnu matricu a vrijedi*

$$\det a = \det a^T.$$

Permutira li se svaki redak s odgovarajućim stupcem determinanta se ne mijenja.

Dokaz. Neka je $b = a^T$; permutaciji p množine $1(n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ odgovara član

(1) $$b(p) = (-1)^{ip} b_{p_1 1} b_{p_2 2} \cdots$$

u $\det b$; no $b_{ij} = a_{ji}$ pa zato izraz $b(p)$ postaje

(2) $$b(p) = (-1)^{ip} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots$$

Tu se pojavljuje produkt $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots$; napišimo taj produkt tako da *drugi* indeksi budu po redu $1, 2, \cdots$; neka time *prvi* indeksi daju permutaciju q; dakle je

(3) $$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots = a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots$$

No, to *mijenjanje redoslijeda* faktora ima za posljedicu stanovit broj k transpozicijâ u permutaciji p, čime ona prelazi u identičku permutaciju kao i isto tolik broj k transpozicijâ u permutaciji $1(n)$, čime ona prelazi u permutaciju q; zato je $(-1)^{ip} = (-1)^k$, $(-1)^{iq} = (-1)^k$, tj.

(4) $$(-1)^{ip} = (-1)^{iq}$$

Na osnovu (3) i (4) daje (2) ovo:

$$b(p) = (-1)^{iq} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots$$

A to znači da je $b(p)$ član $a(q)$ u $\det a$ koji odgovara permutaciji q; no kad p prolazi kroz $1(n)!$, prolazi i q kroz $1(n)!$, pa je dakle

(5) $$\sum_p b(p) = \sum_q a(q).$$

No, po definiciji je $(5)_1 = \det b$, $(5)_2 = \det a$, pa zbog $b = a^T$ jednakost (5) daje traženu jednakost $\det a^T = \det a$.

5.2. Primjedba. Mada je tek za *neke* matrice a ispunjeno $a^T = a$, ipak je $\det a^T = \det a$ za *svaku* kvadratnu *konačnu* matricu.

Već i za slučaj $n = 2$ dobiva se time pravilnost koja s obzirom na *geometrijsko* značenje determinante nije nipošto očigledna.

Kombinirajući teorem 2.1 i 5.1, dolazimo do ovog teorema:

5.3. Teorem. *Determinanta kvadratne matrice je alternirajuća funkcija svojih stupaca (redaka).*

5.4. Primjer. U kakvoj su vezi determinante matrica

$$a = [a_{.1},\ a_{.2},\ a_{.3}, \cdots],\quad [a_{.3},\ a_{.1},\ a_{.2},\ a_{.4}, \cdots]?$$

Transpozicijom stupaca $a_{.2}$, $a_{.3}$ prelazi matrica a u $[a_{.1},\ a_{.3},\ a_{.2},\ a_{.4} \cdots]$; ako ovdje transponiramo stupce $a_{.1}$, $a_{.3}$, dolazimo do matrice b; kako determinanta svaki put prelazi u suprotnu, znači da je:

$$\det [a_{.3}\, a_{.1}\, a_{.2} \cdots] = -\det [a_{.1}\, a_{.3}\, a_{.2} \cdots] = -(-\det a).$$

Na isti se način dokazuju ova dva teorema:

5.5. Teorem. *Ako u matrici a stupac (redak) x premjestimo kao početni stupac (redak), dobiva se matrica kojoj je determinanta* $= (-1)^x \det a$.

5.6. Teorem. *U matrici a promatrajmo redak $a_{i.}$ i stupac $a_{.j}$; premjestimo taj redak da postane prvi redak, a u rezultatu premjestimo stupac j tako da dođe na prvo mjesto; za dobivenu matricu b vrijedi ovo:*

$$\det b = (-1)^{i+j} \det a,$$

$$b_{11} = a_{ij}.$$

6. O POJEDNOSTAVLJENJU DETERMINANATA

6.1. Teorem. *Ako u determinanti koji stupac* (redak) *dodamo kojem drugom stupcu* (retku) *determinante, determinanta ne mijenja svoje vrijednosti. Isto vrijedi ako smo prethodno stupac* (redak) *koji smo dodavali pomnožili kakvim izrazom.*

Dokaz mu je kratak. Tako npr. ako u matrici a dvostruk stupac $a_{.3}$ dodamo stupcu $a_{.1}$, dobivamo matricu

$$[a_{.1} + 2\,a_{.3},\ a_{.2},\ a_{.3}, \ldots]$$

pa za pripadnu determinantu imamo

$$\det [a_{.1} + 2\,a_{.3},\ a_{.2}, \ldots] = \det [a_{.1}\ a_{.2} \ldots] + \det [2\,a_{.3}\ a_{.2}\ a_{.3}\ a_{.4} \ldots] =$$

$$= \det a + 2 \det [a_{.3}\ a_{.2}\ a_{.3}\ a_{.4} \ldots].$$

No, posljednja determinanta $= 0$, jer ima dva jednaka stupca: prvi i treći.

Teoremom 6.1. mnogo se služimo.

Ali je
$$\begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} c-c' & d-d' \\ c'-c & d'-d \end{vmatrix}.$$

U ovom slučaju smo **istodobno** oduzimali redak 2 od retka 1 kao i redak 1 od retka 2. *A ova se operacija ne može svesti na* ***uzastopno*** *nizanje operacija opisanih u teoremu* 6.2.

6.4. Teorem. *Ako je koji stupac (redak) determinante linearan spoj ostalih stupaca (redaka) determinante, tada je determinanta jednaka* 0.[1]

Dokaz. Recimo da je redak $a_{1.}$ linearna kombinacija ostalih redaka; to znači da se niz $a_{1.} = a_{11}, a_{12}, \ldots$ može prikazati u obliku

$$a_{1.} = \lambda_2 a_{2.} + \lambda_3 a_{3.} + \cdots,$$

gdje su $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$ brojevi (neki ili svi mogu biti 0). No, ako u matrici a pomnožimo redak $a_{2.}$ sa $-\lambda_2$, redak a_3 sa $-\lambda_3 \cdots$ i te produkte pribrojimo retku $a_{1.}$, tada iz a nastaje matrica b, kojoj je prvi redak $b_{1.}$ ispunjen samim nulama; dakle je $\det b = 0$; u drugu ruku prema teoremu 6.2. vrijedi $\det a = \det b$. Dakle je $\det a = 0$.

6.4.1. Primjedba. Poslije ćemo u § 10.4. dokazati da vrijedi i obrat teorema 6.4. (v. teorem 10.5). Taj je obrat vrlo koristan teorem.

7. LAPLACEOV TEOREM. RAZVIJANJE DETERMINANTE PO ELEMENTIMA NEKOG STUPCA ILI RETKA

7.1. Uočimo neku kvadratnu (n, n)-matricu tj. matricu a poretka (n, n), i njenu determinantu

$$\det a = \sum_p (-1)^{ip} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots; \tag{1}$$

ip je broj inverzija u permutaciji p.

Tu p prolazi skupom $1(n)!$ svih permutacija množine $1(n)$. Promatrajmo sve one permutacije p koje počinju sa 1; one su oblika $1q$, gdje je q proizvoljna permutacija množine $\{2, \cdots, n\}$; no za svaku takvu permutaciju q očigledno je $iq = i(1, q)$. Nadalje je očigledno

$$\sum_{q \in \{2,3,\ldots\}!} (-1)^{ip} a_{q_2 2} a_{q_3 3} \cdots = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

---

[1] Geometrijski je stvar evidentna; npr., ako iz zadana dva radijus-vektora $\vec{u}, \vec{v}$ formiramo njihov linearni spoj $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, tada je „volumen" kvadra nad bridovima $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jednak 0, jer je broj dimenzija toga kvadra <3.

6.1.1. Primjer.

$$\det a = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \det[a_{1.}\ a_{2.}\ a_{3.}]^T = \det[a_{1.},\ a_{2.}\ -2a_{1.},\ a_{3.}\ -4a_{1.}]^T =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -13 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \Big\}\cdot\ -13/17 \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 26/7-19 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{po teoremu } 1.3) = 1.\ -7\cdot(26/7-19) = -26+133 = 107.$$

Dakle je

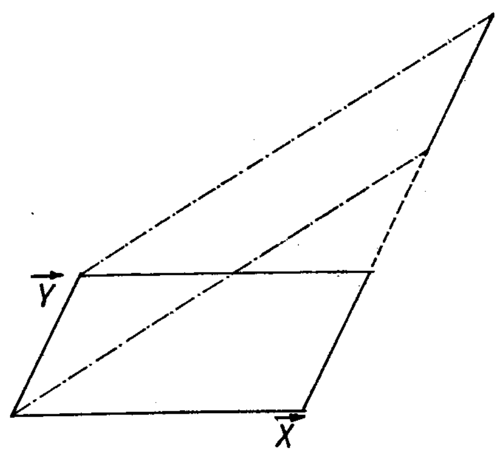
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 107.$$

Primjenjujući uzastopno teorem 6.1, možemo dokazati da vrijedi ovo:

⟶ **6.2.** Teorem. *Ako kojem određenom, inače proizvoljnom stupcu (retku) determinante pribrojimo linearan spoj ostalih njenih stupaca (redaka), determinanta se ne mijenja.*

To znači ovo:

Ako uočimo proizvoljan stupac (redak) l pa svaki drugi stupac (redak) x pomnožimo nekim izrazom $g(x)$, koji može biti i 0, pa sve te produkte $xg(x)$ pribrojimo liniji l, novonastala matrica, koliko god se razlikovala od polazne matrice a, ipak ima istu determinantu kao i a.



Sl. 11.11.6.

Geometrijski je taj teorem generalizacija činjenice o *jednakosti ploština svih paralelograma s istom bazom i istom visinom* (v. sl. 11·11.6.) ,gdje je

$$[\vec{x},\ \vec{y}] = [\vec{x} + 2\vec{y},\ \vec{y}].$$

6.3. Napomena. Treba imati na umu da se ***istodobnim*** dodavanjem jednih redaka drugima determinanta *može promijeniti*. Tako npr. kad bismo u matrici poretka (n, n) od početnog retka oduzeli redak 2, od retka 2 redak 3, . . . , a od posljednjeg retka oduzeli početni, dobili bismo jednu *singularnu* matricu.

Npr.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-c' & d-d' \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ c'-c & d'-d \end{vmatrix}$$

Ova determinanta je determinanta matrice, koja se iz matrice a dobije tako da joj se precrta prvi redak i prvi stupac: ta se determinanta zove *kofaktor vrijednosti a_{11} u odnosu na matricu a* i označuje se sa $f a_{11}$ ili $f(a_{11})$, ili preciznije $f_a a_{11}$, ili također a^{11}.

Na taj način vidimo da se u izrazu $(1)_2$ za $\det a$ pojavljuje i dio $a_{11} f a_{11}$.

7.2. Nađimo sada onaj dio u $(1)_2$ u kojem se pojavljuje faktor a_{21}. Taj se slučaj svodi na prethodni. Naime, transpozicijom redaka $a_{1.}$ i $a_{2.}$ u matrici a dolazi se do matrice b, kojoj je determinanta $= -\det a$ (v. teorem 2.1); no komponenta a_{21} je sada $= b_{11}$. Prema prethodnom slučaju, u izrazu za $\det b$, odnosno za $-\det a$ pojavljuje se dio $b_{11} f_b b_{11}$, dakle $a_{21} f_b b_{11}$. To znači, da se u izrazu za $\det a$ pojavljuje dio $-b_{11} f_b b_{11}$, tj. $a_{21} \cdot (-f_b b_{11})$. No, $f_b b_{11}$ dobije se iz b ispuštanjem 1. retka i 1. stupca; a to znači da $f_b b_{11}$ nastaje iz a ispuštanjem 2 retka i 1. stupca. Drugim riječima, onaj izraz $f a_{21}$ kojim se a_{21} množi u izrazu za $\det a$ dobije se tako da se determinanta što se iz a dobije ispuštanjem 2. retka i 1. stupca pomnoži sa -1. Upravo se zato taj izraz

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \det (a \setminus a_{21})$$

i naziva kofaktorom $f a_{21}$ od a_{21} u odnosu na matricu a. Općenito, neka važi ova definicija.

7.3. Definicija kofaktora. *Kofaktor ili algebarski komplement od vrijednosti komponente a_{ij} u matrici a, simbolički*

$$f a_{ij} \text{ ili } f_a a_{ij} \text{ ili } a^{ij},$$

jest produkt broja $(-1)^{i+j}$ i determinante matrice $a \setminus a_{ij}$, koja iz a nastaje brisanjem retka i te stupca j;

dakle je

$$f_a a_{ij} = (-1)^{i+j} \det (a \setminus a_{ij}) = (-1)^{i+j} \begin{array}{c c} & \begin{matrix} \phantom{a_{11}} & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & \cdot & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \end{array}$$

Tako npr.

$$f a_{42} = (-1)^{4+2} \begin{array}{c c} & 2 \\ 4 & \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} \end{array}$$

Ako se u matrici a permutiraju reci 4 i 3 pa u rezultatu reci 3 i 2 i, najzad, 2 i 1, dolazi se do matrice koja iz a nastaje tako da joj se redak 4 premjesti kao početni redak; ako se u rezultatu još permutiraju stupci 1 i 2, dobit će se matrica x, kojoj je $x_{11} = a_{42}$ te $f x_{11} = f_a a_{42}$.

Prelazom od matrice a na transponiranu matricu a^T i služeći se pravilom da je $\det a = \det a^T$ (teorem 5.1), vrijedi pravilo da se determinanta može razviti i po svakom svojem retku.

Dokazali smo ovaj osnovni teorem o determinantama:

⟶ **7.7 (Laplaceov teorem).** *Skalarni produkt svakog stupca* (retka) *determinante s pripadnim algebarskim komplementima daje vrijednost te determinante*:

$$\sum_i a_{ij} f\, a_{ij} = \det a \ (\textit{razvoj determinante po stupcu } j)$$

$$\sum_j a_{ij} f\, a_{ij} = \det a \ (\textit{razvoj determinante po retku } i).$$

7.8. Što se dobije množeći skalarno stupac komplementima nekog drugog stupca?

Promatrajmo razvoj determinante matrice a npr. po prvom stupcu:

$$a_{11} f\, a_{11} + a_{21} f\, a_{21} + \cdots = \det [a_{.1},\ a_{.2}, \ldots].$$

To vrijedi za determinantu; ako u toj jednakosti umjesto koeficijenata a_{11}, a_{21}, odnosno stupca $a_{.1}$ stavimo izraze $a_{12}, a_{22}, \ldots$, odnosno stupac $a_{.2}$ matrice a, onda dobijemo ovo:

$$a_{12} f\, a_{11} + a_{22} f\, a_{12} + \cdots = \det [a_{.2}\ a_{.2},\ a_{.3}, \ldots].$$

No ta je determinanta $=0$ jer su joj prva dva stupca jednaka (v. korolar 2.2).

Na isti se način zaključuje da je skalarni produkt bilo kojeg stupca (retka) determinante s algebarskim komplementima kojeg drugog stupca (retka) determinante jednak 0. Ako tu činjenicu spojimo s gornjim teoremom 7.7, dolazimo do ovog osnovnog Laplaceova teorema o determinantama.

P. S. Laplace [Laplás] (1749—1827) veliki francuski matematičar

⟶ **7.9. Teorem (Laplaceov teorem o razvijanju determinante).** [1] ***Neka je a kvadratna matrica oblasti (n, n) gdje je n prirodni broj > 1. Skalarni produkt svakog stupca matrice i algebarskih komplemenata toga (odnosno bilo kojega drugog) stupca te matrice daje za rezultat det a (odnosno 0); simbolički: za svako i, k ∈ [1, n] vrijedi***

$$(L) \qquad a_{.i} \circ f\, a_{.k} = \delta_{ik} \cdot \det a \quad \text{tj.} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i} f\, a_{\nu k} = \delta_{ik} \cdot \det a;$$

---

[1] P. S. Laplace [Laplás] (1749—1827), veliki francuski matematičar i Napoleonov suradnik.

odnosno za retke:

$$(\mathrm{L}^T) \qquad a_{i.} \circ f\, a_{k.} = \delta_{ik} \det a \quad \text{tj.} \quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\, f\, a_{k\nu} = \delta_{ik} \cdot \det a;$$

pri tom je

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq k \\ 1 & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Taj Laplaceov teorem spada među najvažnije matematičke činjenice.

Za vježbu je vrlo korisno formule (L), (L^T) *konkretizirati*, npr. napisati ih za $n=5$, $i=3$, $k=3$, 4, 5.

7.9.1. Primjedba. Vrlo je zgodno taj Laplaceov teorem uzeti za *definiciju* determinante, pri čemu se, *po definiciji*, uzima da je $\det[b]=b$ za svaki brojevni izraz b.

Tako npr. razvijajući po prvom stupcu, imamo:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = u f u + x f x = u \cdot \det y + x \cdot -[v] = u y - x v.$$

Analogno:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 f a_1 + a_2 f a_2 + a_3 f a_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_3 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix} = \cdots.$$

7.9.2. *Dokaz Cramerova teorema kao jedna primjena Laplaceova teorema* (isp. pogl. 9, § 1.9).

Neka za n veličina x_1. $x_2, \ldots, x_n$ vrijedi ovih n jednadžbi

$$(1) \qquad \begin{array}{ll|l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n & = c_1 & \cdot f a_{11} + \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n & = c_2 & \cdot f a_{21} + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} x_\nu & = c_n & \cdot f a_{n1} \end{array}$$

$$(2) \quad (a_{11} f a_{11} + a_{21} f a_{21} + \cdots) x_1 + (a_{12} f a_{11} + a_{22} f a_{21} + \cdots + a_{n2} f a_{n1}) x_2 + \cdots =$$

$$= c_1 f a_{11} + c_2 f a_{21} + \cdots + c_n f a_{n1}.$$

Prema Laplaceovu pravilu tu je koeficijent od x_1 upravo $\det a$; koeficijenti od $x_2, x_3 \cdots$ su 0; na desnoj strani u (2) je determinanta $a(1)$ kojoj matrica nastaje tako da se stupac $a_{.1}$ zamijeni sa