

npr., linearna jednađba $0x=2$ očigledno nema rješenja, tako se i pitanje da li zadan linearni sistem ima ili nema rješenja svodi putem eliminacije na slično pitanje: *ako nas eliminacije ne dovedu do apsurd $0=top$, znak je to da je rješenje linearnog sistema osigurano i da je to baš ono koje smo usput dobili ili ga već gotovo dobili.*

Dokaz gornjih tvrdnji iznijet ćemo u poglavlju 15. o rangju matrica.

2.7. Gaussov postupak pri rješavanju linearnih jednađbi s numeričkim koeficijentima. Gaussov postupak je specijalan slučaj metode protivnojednakih koeficijenata.

Inače, možemo pretpostaviti da radimo sa sreenim sistemom linearnih jednađbi.

2.7.1. Kod Gaussova postupka je važno da u zadanom sistemu S jednađbi odaberemo jednu jedinu jednađbu — vodeću jednađbu i u njoj određenu nepoznanicu, odnosno vodeći član. Pred vodeću jednađbu stavimo zvjezdicu da je lakše i bolje vidimo. Vodeći član u vodećoj jednađbi markiramo također, npr. tako da ga uokružimo, podvučemo, uokvirimo i sl. Vodeću nepoznanicu ćemo eliminirati tako da primijenimo metodu protivno-jednakih koeficijenata, i to sparujući tu vodeću jednađbu i svaku ostalu jednađbu sistema.

Na tako dobiveni sistem jednađbi primjenjuje se opet isti postupak, itd. do kraja.

2.7.2. Rješenja sistema S' tako dobivenih »vodećih jednađbi« podudaraju se s rješenjima polaznog sistema S .

2.7.3. Izbor vodeće jednađbe i vodeće nepoznanice. Izbor se vrši prema karakteru samog sistema jednađbi. U praksi se obično radi ovako:

a) Uoči se ona nepoznanica x_k uz koju stoji koeficijent najveće apsolutne vrijednosti.

b) Zatim se ona, odnosno jedna jednađba u kojoj dotični član dolazi, proglasi za vodeću; neka je to jednađba i .

c) Ta se vodeća jednađba i pomnoži recipročnom vrijednošću »vodećeg koeficijenta«; dakle se jednađba i pomnoži sa a_{ik}^{-1} ; time se dobije jednađba J .

d) Zatim se ta nova jednađba J pomnoži, za svaku jednađbu $j \neq i$, koeficijentom — a_{jk} od x_k u jednađbi j i napravi suma te nove jednađbe i jednađbe J .

Time se dobije novi sistem jednađbi s nepoznaticama bez x_k u svima jednađbama osim u jednoj. Na taj novi sistem primjenjuje se opet isti postupak: izabere se u njemu vodeća jednađba i vodeća nepoznanica...

2.7.4. Zbirna kontrola. U praksi se uz svaku zadanu jednađbu sistema nadopisuje u poseban stupac još i suma svih njenih koeficijenata, pa se s tim sumama radi isto što i sa članovima dotične jednađbe; u svakoj novoj jednađbi

POGLAVLJE 9.

SISTEM LINEARNIH JEDNADŽBI S OPĆIM KOEFICIJENTIMA. POJAVA DETERMINANTE

1. DVIJE LINEARNE JEDNADŽBE. DETERMINANTE STUPNJA (2,2)

1.1. Neka za nepoznate vličiine x, y vrijedi:

$$(1) \quad \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot b' \\ \cdot -b \end{array} + \begin{array}{l} \cdot -a' \\ \cdot a \end{array}$$

Pri tom su a, b, c, a', b', c' brojevi ili brojevnii izrazi.

Pomnožimo prvu jednadžbu sa b' , odnosno $-a'$, te drugu jednadžbu sa $-b$, odnosno a , i zbrojimo dobivene jednadžbe (taj smo posao naznačili u (1) simbolički s onim što smo pripisali desno od c -ova).

Dobijemo ove dvije jednadžbe:

$$(2) \quad \begin{array}{l} (ab' - a'b)x = b'c - bc' \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c. \end{array}$$

1.2. Sistem (2) je naročito jednostavno i pregledno građen; naime;

- 1) u svakoj jednadžbi sistema (2) dolazi jedna jedina od napisanih nepoznanica polaznog sistema (1);
- 2) koeficijent od svake nepoznanice u (2) je jedan te isti izraz naročito pravilno građen od koeficijenata svih nepoznanica u (1);
- (3) i desna strana u novom sistemu (2) ima sličnu građu (strukturu) kao i koeficijent nepoznanica u (2); ta se struktura sastoji u tom da se radi o razlici dvaju produkata po dva faktora.

1.3. Definicija. Izraz $ab' - a'b$ zovemo determinantom ili opredjeliteljem jednadžbi (1) ili pravokutne tablice

$$\begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array}$$

i ta se determinanta označuje sa

$$\det \begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array} \text{ ili } \det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \text{ ili } D \begin{array}{cc} a & b \\ a' & b' \end{array} \text{ ili } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix};$$

tj. oznaka determinante dobije se iz oznaka tablice tako da se pred tablicu stavi $\det$ ili D ili da se tablica stavi u *uspravne zagrade*. Prema tome

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Smisao te definicije jednakosti sastoji se u tome da se *jedna strana jednakosti (3) može svuda zamijeniti drugom stranom te jednakosti (3)*. Tako npr.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 7 \cdot 3 = -1$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x (=1)$$

$$2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \text{ itd.}$$

1.4. Koeficijenti nepoznanica tvore »*tablicu koeficijenata*« pa se zovu *elementi* ili *članovi* ili *koordinate* ili *komponente te tablice*. Radi preglednosti, običaj je da se tablica stavi u *uglaste zagrade*. Ako tablicu koeficijenata proširimo i »stupcem« ostalih koeficijenata jednadžbe, dobije se »*proširena tablica*« zadanog sistema jednadžbi (1); ona glasi:

$$(4) \quad \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \text{ odnosno } \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}.$$

1.5. *Réci ili redići, stupci i dijagonale pravokutnih tablica.* Govori se o *prvom retku* ili *drugom retku* te tablice (4) ili kakve druge tablice. Specijalno u tablici

$$\begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix}$$

koeficijenata nepoznanica jednadžbi (1) prvi redak ili prvi redić glasi $a \ b$; drugi redak glasi $a' \ b'$; prvi stubac je a ; drugi stubac je b . Glavna dijagonala je

a , odnosno $a \ b'$; ona počinje lijevo gore. Sporedna dijagonala je b , odnosno b'

sno $b \ a'$, jer čitamo i pišemo najprije ono što je u gornjem retku pa onda ono što je u narednom retku. Sporedna dijagonala počinje desno gore.

1.6. *Retke numeriramo rednim brojevima 0, 1, 2, ... ili prirodnim brojevima 1, 2, ... odozgo prema dolje; stupce numeriramo slično, i to od lijeve strane prema desnoj strani.* Tako se govori o prvom retku, drugom retku itd. Isto vrijedi i za stupce: prvi stupac, odnosno po redu prvi stupac, drugi stupac itd.

Npr. u pravokutnoj tablici

3	4	5	redak prvi
−1	3	2	redak drugi
4	1	8	redak treći

redak drugi glasi −1 3 2.

Glavna „dijagonala“ je 3 3 8; a sporedna dijagonala je 5 3 4. „Sjecište“ ili „polje“ (1, 1) je zauzeto sa 3; ono drugo 3 leži u sjecištu (2, 2). Dijagonala koja završava dolje desno glasi 3 3 8; a ona koja završava dolje lijevo glasi 5 3 4.

1.7. Oblast (domen) ili stupanj tablice. Ako pravokutna tablica t ima r redaka i s stupaca, kaže se da je ona oblasti, ili poretka ili stupnja $r \times s$ ili potpunije $1(r) \times 1(s)$ i piše $\text{Dom } t = r \times s$ ili potpunije $\text{Dom } t = 1(r) \times 1(s)$; sjetimo se da $1(r) = \underbrace{\{1, 2, \dots\}}_r$.

Umjesto $r \times s$ možemo pisati (r, s) odnosno $(1(r), 1(s))$.

1.8. Definicija determinante za tablicu stupnja 2×2 . *Determinanta* ili *opredjelitelj pravokutne* — zapravo kvadratne — *tablice* stupnja 2×2 jest razlika produkta elemenata u tablici na glavnoj dijagonali i produkta onih elemenata koji su na sporednoj dijagonali.

$$\text{Npr. } c = \begin{vmatrix} c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ za svaki izraz } c; \quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{čak je } 0 = \begin{vmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

za bilo kakve brojne izraze m, n .

1.9. Upotreba pojma i oznake za determinante. Smisao gornje definicije i oznake gornje determinante sastoji se u tome da se na pregledan način vidi veza između determinante i njenih elemenata prema ulozi koju ti elementi imaju. Ta će se ideja vidjeti osobito kasnije, kad nam pod ruku dođu determinante s mnogo više elemenata.

1.10. Cramerov teorem (u specijalnom slučaju) glasi ovako:

$$\text{Iz} \quad ax + by = c$$

$$a'x + b'y = c'$$

$$\text{izlazi} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Riječima: iz zadanog sistema jednažbi (1) izlazi drugi sistem, koji je građen ovako: svaku nepoznanicu sistema (1) pomnožimo determinantom sistema (1) i napišemo da je taj produkt jednak determinanti koja iz determinante zadanog

sistema (1) izlazi tako da u njoj stupac koji odgovara dotičnoj nepoznatici zamjenimo onim što stoji na desnoj strani sistema (1).

1.11. Cramerov teorem. Vrlo je plodna naučna tekovina da taj izraz vrijedi ne samo za linearan sistem od 2 jednačbe s 2 nepoznate nego za svaki konačan linearan sistem koji ima toliko jednačbi koliko ima nepoznanica. To je tzv. Cramerov teorem¹⁾ (za dokaz vidi pogl. 11 teor. 7.9.2. i 12, § 2.1.2).

1.11.1. Tako npr. iz

$$(1) \quad \begin{aligned} 3x + 5y &= -4 \\ 2x - 7y &= 3 \end{aligned}$$

izlazi odmah

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix},$$

$$\text{tj.} \quad (-21 - 10)x = 28 - 15, \quad \text{tj.} \quad -31x = 13,$$

dakle

$$x = -13/31 = -0,4 \dots$$

$$\text{Slično} \quad -31y = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{tj.} \quad -31y = 17, \quad \text{tj.} \quad y = -17/31.$$

1.11.2. Iz jednačbi

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 5y - 4z = 2 \\ x - 2y + z = 5 \\ 4x + 5y - 7z = 0 \end{cases}$$

izlazi

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

¹⁾ Gabriel Cramer [Kramer] (1704—1752): *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1790. (Uvod u analizu algebarskih krivulja). Tim djelom uvedene su determinante u naučnu literaturu.