takođe neprekidne u tački $x = x_0$.

Specijalno: a) cela racionalna funkcija

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

je neprekidna u proizvoljnoj tački x; b) razlomljena racionalna funkcija

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

neprekidna je za sve vrednosti x za koje je imenilac različit od nule.

Uopšte osnovne elementarne funkcije

$$x \mapsto x^n, \; x \mapsto \sin x, \; x \mapsto \cos x, \; x \mapsto \tan x, \; x \mapsto a^x,$$

$$x \mapsto \log_a x, \; x \mapsto \arcsin x, \; x \mapsto \arccos x, \; x \mapsto \arctan x, \ldots$$

neprekidne su u svim tačkama[5] gde su definisane.

Opštiji rezultat je: ako je funkcija f neprekidna u tački $x = x_0$ a funkcija g u tački $y = y_0 = f(x_0)$, to je funkcuja $g \circ f$ neprekidna u tački $x = x_0$.

3^0 Osnovne teoreme o neprekidnim funkcijama. Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ onda je: 1) f je ograničena na tom segmentu; 2) dostiže na njemu infimum m i supremum M (Vajerštrasova teorema); 3) uzima na svakom intervalu $]\alpha, \beta[\subset [a, b]$ sve vrednosti između $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ (Košijeva teorema). Specijalno, ako je $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, onda postoji γ $(\alpha < \gamma < \beta)$, tako da je $f(\gamma) = 0$.

4^0 Rešeni zadaci.

304. Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$ i $\varepsilon = 0{,}001$. Za vrednosti $x_0 = 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001$; naći pozitivan broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ takav da iz nejednakosti $|x - x_0| < \delta$ sleduje nejednakost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Može li se za dato $\varepsilon = 0{,}001$ naći takvo $\delta > 0$, koje bi odgovaralo svim vrednostima x_0 iz intervala $]0, 1[$, tj. tako da kad god je $|x - x_0| < \delta$, da bude $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, za bilo koje $x_0 \in]0, 1[$?

◀ Pošto je $x > 0$ i $x_0 > 0$, to iz nejednakosti

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} \leq \frac{|x - x_0|}{x_0 (x_0 - |x - x_0|)} < \varepsilon$$

nalazimo, da je

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} = \delta(\varepsilon, x_0) \approx 0{,}001 x_0^2.$$

[5]Prim. prevodioca: Pravilnije je pisati: funkcija $x \mapsto x^n, \ldots$ nego samo funkcija $x^n, \ldots$

Tada: a) $\delta \approx 10^{-5}$; b) $\delta \approx 10^{-7}$; c) $\delta \approx 10^{-9}$.

Pretpostavimo sada, da za $\varepsilon = 0,001$ postoji konstantno $\delta > 0$, koje odgovara svim $x_0 \in]0,1[$. Tada za $x = x_0 - \frac{\delta}{2}$ imamo da je $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$, dok je nejednakost

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{\frac{\delta}{2}}{x_0^2 - \frac{x_0\delta}{2}} < \varepsilon$$

ispunjena samo za $\frac{\delta}{4} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon}} < x_0 < 1$ i, sleduje, nije ispunjena za

$$0 < x_0 < \frac{\delta}{4} + \sqrt{\left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \frac{\delta}{2\varepsilon}}.$$

Na taj način, $\delta > 0$, koje bi odgovaralo svim $x_0 \in]0,1[$ ne postoji. ►

305. Neka se za neko $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, da bude $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ako je $|x - x_0| < \delta$.

Može li se tvrditi da je funkcija f neprekidna u tački x_0, ako: a) skup pozitivnih ε je konačan; b) skup pozitivnih ε čine razlomci oblika $\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

◄ a) Ako je skup pozitivnih ε konačan, onda među njima postoji najmanji ε_0. Tada za $\forall \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ već ne mora da postoji broj $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, koji se zahteva u definiciji neprekidnosti funkcije. Dakle, ne može se tvrditi da je funkcija neprekidna.

b) Funkcija f je neprekidna, jer za $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N : \forall n > N, \varepsilon = \frac{1}{2^n} < \varepsilon_1$. A svako $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ iz definicije neprekidnosti, koje odgovara pozitivnom ε, odgovara takođe i svakom $\varepsilon_1 > \varepsilon$. ►

306. Neka je data funkcija $f(x) = x + 0,001\,[x]$. Pokazati, da se za svako $\varepsilon > 0,001$ može izabrati takvo $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, da bude $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, kad god je $|x' - x| < \delta$, a za $0 < \varepsilon \le 0,001$ i proizvoljno x to nije moguće. U kojim tačkama funkcija f ima prekid?

◄ Pošto se bilo koja dva broja x i x' mogu predstaviti u obliku $x = n + q$, $x' = n' + q'$, gde $q, q' \in [0,1[$ a $n, n' \in \mathbb{Z}$ to je

$$|x - x'| = |n - n' + q - q'| \ge |n - n'| - |q - q'| \ge |[x] - [x']| - 1,$$

odakle sledi

$$|[x] - [x']| \le |x - x'| + 1.$$

Uzmimo $\varepsilon > 0,001$. Tada je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |x - x' + 0,001([x] - [x'])| \le |x - x'| + 0,001\,|[x] - [x']| \\ &\le |x - x'| + 0,001(|x - x'| + 1) = 1,001\,|x - x'| + 0,001 < \varepsilon, \end{aligned}$$

ako je

$$0 < |x - x'| < \frac{\varepsilon - 0,001}{1,001} = \delta(\varepsilon, x).$$

Neka je $0 < \varepsilon \leq 0,001$. Tada, ako uzmemo $x = n$, $x' = n - 1 + \frac{k}{k+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, to je

$$|f(x) - f(x')| = \frac{1}{k+1} + 0,001 > \varepsilon \ (k \in \mathbb{N}),$$

a u isto vreme je $|x - x'| = \frac{1}{k+1} \to 0$ kad $k \to \infty$, tj. za $\forall\delta > 0$: $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$. Sleduje, funkcija f ima prekid u tačkama $x = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ako je pak $x = n + q$, $x' = n + q'$ $(0 < q < 1, 0 < q' < 1)$, to je za $\forall\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| < \varepsilon,$$

kad god je $|x - x'| < \delta = \varepsilon$, što daje neprekidnost funkcije f na svakom intervalu $n < x < n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. ▶

307. Neka za svako $\delta > 0$ postoji $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, takvo da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kad god je $|x - x_0| < \delta$. Sleduje li odatle neprekidnost funkcije f u tački $x = x_0$? Koje svojstvo funkcije je opisano navedenim nejednakostima?

◀ Ne sleduje. Na primer $f(x) = \left(1 + (x - x_0)^2\right) sgn(x - x_0)$. Tada za svako $\delta > 0$ postoji x takvo da je $|x - x_0| < \delta$ i onda je

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 + (x - x_0)^2 < 1 + \delta^2 = \varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0),$$

tj. uslovi dati u zadatku su ispunjeni. Međutim, $|f(x) - f(x_0)| \geq 1$ za sve x i, sleduje, razlika $|f(x) - f(x_0)|$ ne može biti manja od ε, ako je $0 < \varepsilon < 1$.

Formulisani uslov u zadatku obezbeđuje samo ograničenost funkcije u tački $x = x_0$. ▶

308. Pomoću "ε–δ" rasuđivanja dokazati neprekidnost sledećih funkcija:

a) $x \mapsto ax + b$; b) $x \mapsto x^2$; c) $x \mapsto x^3$; d) $x \mapsto \sqrt{x}$; e) $x \mapsto \sqrt[3]{x}$; f) $x \mapsto \sin x$; g) $x \mapsto \cos x$; h) $x \mapsto \arctan x$.

◀ a) Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je za bilo koje $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a|\,|x - x_0| < \varepsilon,$$

ako je $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} = \delta(\varepsilon, x_0)$.

b) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Tada je

$$|x^2 - x_0^2| = \left|(x - x_0)^2 + 2x_0(x - x_0)\right| \leq |x - x_0|^2 + 2|x_0|\,|x - x_0| < \varepsilon,$$

ako je samo $|x-x_0| < \sqrt{|x_0|^2+\varepsilon} - |x_0| = \delta(\varepsilon, x_0)$.

c) Neka je $0<\varepsilon<1$. Imamo

$$\left|x^3 - x_0^3\right| = \left|x^2 + xx_0 + x_0^2\right| |x-x_0|.$$

Neka je sada $|x-x_0|<1$. Tada je $|x| \leq |x_0|+1$, i zato je

$$\left|x^3 - x_0^3\right| \leq \left(3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1\right)|x-x_0| < \varepsilon,$$

ako je

$$|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{3|x_0|^2 + 3|x_0| + 1} = \delta(\varepsilon, x_0).$$

d) Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon, \quad (x_0 > 0),$$

ako je $|x-x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0} = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Ako je $x_0 = 0$, onda je očigledno $\delta(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2$.

e) Imamo

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\right| &= \frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{|x-x_0|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x_0}}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt[3]{x_0^2}}{4}} \\ &\leq \frac{|x-x_0|}{\frac{3\sqrt[3]{x_0^2}}{4}} < \varepsilon, \quad (x_0 \neq 0),\end{aligned}$$

ako je $|x-x_0| < \frac{3\sqrt[3]{x_0^2}}{4}\varepsilon = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Ako je $x_0 = 0$, tada je $\delta(\varepsilon, x_0) = \varepsilon^3$.

f)

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}\cdot 1 = |x-x_0| < \varepsilon,$$

kad god je $|x-x_0| < \delta = \varepsilon$.

g)

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right| < |x-x_0| < \varepsilon,$$

ako je $|x-x_0| < \delta = \varepsilon$.

h) Neprekidnost funkcije $x \mapsto \arctan x$ u tački $x = x_0 = 0$ sledi iz nejednakosti

$$|\arctan x - \arctan 0| = |\arctan x| \leq |x| < \varepsilon,$$

ako je $|x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon$. Neka je $|x_0| > 0$ i $|h| = |x - x_0| < |x_0|$. Ako je

$$\arctan (x_0 + h) - \arctan x_0 = t, \text{ to je } \tan t = \frac{h}{1 + x_0^2 + x_0 h},$$

a pošto je $|t| < |\tan t|$ za $|t| < \frac{\pi}{2}$, to je

$$|\arctan (x_0 + h) - \arctan x_0| = |t| < |\tan t|$$

$$= \left|\frac{h}{1 + x_0^2 + x_0 h}\right| < \frac{|h|}{1 + x_0^2 - |h|\,|x_0|} < \varepsilon,$$

ako je $|h| = |x - x_0| < \frac{(1+x_0^2)\varepsilon}{1+|x_0|\varepsilon} = \delta(\varepsilon, x_0)$. ►

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

309. a) $f_1(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$, za $x \neq 0$ i $f_1(0) = 1$; b) $f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, za $x \neq 0$ i $f_2(0) = 1$.

◄ a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. S obzirom da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, onda postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da je $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ ako je $|x| < \delta$. Tada je (primer 21, a))

$$\left|\left|\frac{\sin x}{x}\right| - 1\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

ako je $|x| < \delta$, tj. f_1 je neprekidna funkcija u tački $x = 0$. Neprekidnost za $x \neq 0$ je očigledna.

b) Imamo,

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f_2(+0),$$

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{-x} = -1 = f_2(-0).$$

Pošto je $f_2(+0) \neq f_2(-0)$, to je funkcija prekidna u tački $x = 0$. ►

310. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, ako je $x \neq 0$ i $f(0)$ proizvoljno.

◄ Uzmimo nizove $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $x_n' = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pošto je

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x_n' = 0 \text{ a}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to\infty} f(x'_n) \text{ to } \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

ne postoji, što znači da funkcija u 0 ima prekid druge vrste. U ostalim tačkama je neprekidna. ►

311. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, za $x \neq 0$ i $f(0) = 0$.

◄ Neprekidnost funkcije f u tački $x = 0$ sledi iz toga što je $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$ kad god je $|x| < \delta = \varepsilon$. U tačkama koje su različite od nule neprekidnost je očigledna. ►

312. $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, ako je $x \neq 1$ i $f(1)$ proizvoljno.

◄ Pošto je $f(1-0) = 1 \neq 0 = f(1+0)$, to funkcija ima prekid u 1. ►

313. $f(x) = x\ln x^2$, za $x \neq 0$ i $f(0) = \alpha$.

◄ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2 = \lim\limits_{x\to 0} 2x\ln|x| = 0$ (primer 205). Odatle sledi neprekidnost funkcije u nuli ako je $\alpha = 0$, tj prekid u nuli za $\alpha \neq 0$. U ostalim tačkama funkcija je neprekidna. ►

314. $f(x) = [x]$.

◄ Ako je $k < x < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ to je $f(x) = [x] = k$ i sledi f je neprekidna u svakoj tački različitoj od celog broja. Ako je $x_0 = k$ onda za $x = k - 1 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, imamo da za svako $\delta > 0$ postoji α $(0 < \alpha < 1)$ tako da je $|x_0 - x| = |1 - \alpha| < \delta$, iako je $|[x] - [x_0]| = 1$, tj. funkcija f ima prekid u tački $x = x_0 = k$, gde je $k \in \mathbb{Z}$. ►

Odrediti tačke prekida i ispitati njihov karakter, ako je:

315. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$.

◄ $\lim\limits_{x\to -1-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0} y = -\infty$, tj. $x = -1$ je tačka beskonačnog prekida. ►

316. $y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$.

◄ Funkcija nije definisana u tačkama $x = -1, 0, +1$. Pošto je

$$\lim_{x\to -1\pm 0} y(x) = \lim_{x\to -1\pm 0} \frac{x-1}{x+1} = \mp\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1, \quad \lim_{x\to 1} y(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0,$$

to su $x = 0$ i $x = 1$ tačke otklonjivog prekida, a $x = -1$ je tačka beskonačnog prekida. ►

317. $y = \frac{x}{\sin x}$.

◄ S obzirom da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \text{ a } \lim_{x\to k\pi\mp 0} \frac{x}{\sin x} = \mp(-1)^k\infty, \quad (k = \pm 1, \pm 2, ..),$$

to je $x = 0$ otklonjiv prekid, a $x = k\pi$ $(k = \pm1, \pm2, ...)$ tačke beskonačnog prekida. ►

318. $y = \cos^2 \frac{1}{x}$.

◄ Uzmimo nizove: $x_n = \frac{1}{n\pi}$ i $x'_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo da oba niza teže nuli kad $n \to \infty$, međutim $\cos^2 \frac{1}{x_n} \to 1$ a $\cos^2 \frac{1}{x'_n} \to 0$, kad $n \to \infty$, što znači da $\lim\limits_{x\to0} \cos^2 \frac{1}{x}$ ne postoji, tj. $x = 0$ je tačka prekida druge vrste. ►

319. $y = \arctan \frac{1}{x}$.

◄ $\lim\limits_{x\to+0} \arctan \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, jer je za $t > \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$

$$\arctan t > \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Slično pokazujemo da je $\lim\limits_{x\to-0} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$. Sleduje, $x = 0$ je tačka beskonačnog prekida. ►

320. $y = \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}$.

◄ Iz nejednakosti $\left|\sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}\right| \le \sqrt{x}\frac{\pi}{2}$ sleduje, da je

$$\lim_{x\to0} \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x} = 0$$

što znači da je $x = 0$ tačka otklonjivog prekida. ►

321. $y = e^{x+\frac{1}{x}}$.

◄ Pošto je $\lim\limits_{x\to+0} e^{x+\frac{1}{x}} = +\infty$, to je $x = 0$ prekid druge vrste. ►

322. $y = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

◄ Imamo

$$\lim_{x\to\pm0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x\to\pm0} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}} \cdot \frac{1-x}{x} = \mp\infty,$$

tj. $x = 0$ je tačka beskonačnog prekida.

Dalje je,

$$\lim_{x\to1-0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0, \quad \lim_{x\to1+0} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1,$$

zato je $x = 1$ prekid prve vrste. ►

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

323. $y = sgn\,(\sin x)$.

◄ Za $n\pi < x < (n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ funkcija je neprekidna kao konstantna. Ispitajmo tačke $x_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Neka je $x = n\pi + \delta$ $(0 < \delta < \pi)$. Tada je

$$|sgn\,(\sin n\pi) - sgn\,(\sin(n\pi + \delta))| = 1 > \varepsilon,$$

ako je $0 < \varepsilon < 1$. Sleduje, $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ su prekidi prve vrste. ▶

324. $y = x - [x]$.

◀ Pošto je prvi sabirak neprekidna funkcija, a drugi ima prekide prve vrste u tačkama $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ (primer 314), to data funkcija ima u tim tačkama prekide prve vrste. ▶

325. $y = x\,[x]$.

◀ Ako je $n < x < n+1$, gde $n \in \mathbb{Z}$ tada je $y = nx$, tj. za te vrednosti promenljive funkcija je neprekidna. Za ispitivanje neprekidnosti u celobrojnim tačkama $x = n$ uzmimo $x = n - h$, $0 < h < 1$. Pošto je

$$\begin{aligned} f(n) &= n[n] = n^2,\ f(n-0) = \lim_{h\to+0} f(n-h) \\ &= \lim_{h\to+0} (n-h)[n-h] = n(n-1), \end{aligned}$$

to su tačke $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ prekidi prve vrste. ▶

326. $y = [x]\sin \pi x$.

◀ Ako je $n < x < n+1$, gde $n \in \mathbb{Z}$ tada je $y = n\sin \pi x$, tj. za te vrednosti promenljive funkcija je neprekidna. Neka je sada $n - \frac{1}{2} < x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$\begin{aligned} -|n-1|\,|\sin \pi x| &\le -|[x]\sin \pi x| \le [x]\sin \pi x \\ &\le |[x]\sin \pi x| \le |n|\,|\sin \pi x|. \end{aligned}$$

S obzirom da je

$$\lim_{x\to n} (-|n-1|\,|\sin \pi x|) = \lim_{x\to n} |n|\,|\sin \pi x| = 0,$$

to je $\lim\limits_{x\to n} [x]\sin \pi x = 0 = y(n)$, što znači neprekidnost funkcije u celobrojnoj vrednosti n. Funkcija je dakle neprekidna u svakoj tački domena. ▶

327. $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

◀ Uzimajući za $x \ne 0$ smenu $\frac{1}{x} = t$, dobijamo $y = [t]$, odakle sledi da su tačke $t = k = \frac{1}{x}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ prekidi prve vrste (primer 314). Ostaje da ispitamo tačku $x = 0$. Pošto je $\lim\limits_{x\to+0} \left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$ (sledi iz primera 229), to je 0 tačka beskonačnog prekida. ▶

328. $y = x\left[\frac{1}{x}\right]$.

◀ Imamo,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{1}{k}+0} x\left[\frac{1}{x}\right] &= \frac{1}{k}(k-1);\ \lim_{x\to\frac{1}{k}-0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{k}\cdot k = 1;\ \ (k = \pm 1, \pm 2, ..), \\ \lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] &= 1 \text{ (prema primeru 229).} \end{aligned}$$

Dakle, tačke $x = k$, $(k = \pm 1, \pm 2, ..)$ su prekidi prve vrste, dok je $x = 0$ otklonjiv prekid. ▶

329. $y = \left[\frac{1}{x^2}\right] sgn\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

◀ Moguće tačke prekida su

$$x = 0;\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{k}};\ x = \pm\frac{1}{k}\ \ (k \in \mathbb{N}).$$

Uzmimo nizove: $x_n = \frac{2}{1+4n}$ i $x_n' = \frac{2}{3+4n}$. Očigledno je da oba niza teže nuli kad $n \to \infty$, međutim $y(x_n) = 2n+4n^2 \to +\infty$ i $y(x_n') = -\left(2 + 6n + 4n^2\right) \to -\infty$, tj. $\lim\limits_{x\to 0} y(x)$ ne postoji. Zato je 0 tačka prekida druge vrste. Pokažimo da je tačka $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ prekid prve vrste (za ostale dokaz je sličan). Imamo,

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 0\right) &= \lim_{\alpha\to+0}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \alpha\right)^2}\right] sgn\sin\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{k}} - \alpha} \\ &= \lim_{\beta\to+0}\left[\left(\sqrt{k}+\beta\right)^2\right] sgn\sin\pi\left(\sqrt{k}+\beta\right) = k sgn\sin\pi\sqrt{k}, \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha k\left(1 - \alpha\sqrt{k}\right)^{-1};$$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 0\right) &= \lim_{\alpha\to+0}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \alpha\right)^2}\right] sgn\sin\frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{k}} + \alpha} \\ &= \lim_{\beta\to+0}\left[\left(\sqrt{k}-\beta\right)^2\right] sgn\sin\pi\left(\sqrt{k}-\beta\right) = (k-1)\, sgn\sin\pi\sqrt{k}, \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha k\left(1 + \alpha\sqrt{k}\right)^{-1};$$

Odavde sleduje da je $\left|y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 0\right) - y\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + 0\right)\right| = 1$, tj. $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ je prekid prve vrste. ▶

Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

330. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ $(x \geq 0)$.

◀ Imamo

$$y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{2}, & x = 1; \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

odakle seleduje da je $x = 1$ prekid prve vrste. ▶

331. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2x}-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

◀ Imamo

$$y = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1} = -1, & -\infty < x < 0; \\ 0, \ x = 0; & \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}} = 1, \ 0 < x < +\infty. & \end{cases}$$

Dakle, $y = sgnx$ i $x = 0$ je prekid prve vrste. ▶

332. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

◀ Pošto je

$$y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1, \ |x| \le 1; \\ \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}+1} = x^2, \ |x| > 1, \end{cases}$$

kao i $y(\pm 1 - 0) = y(\pm 1 + 0)$, to je funkcija neprekidna za sve vrednosti argumenta x. ▶

333. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

◀ S obzirom da je

$$y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}} = \begin{cases} x, \ |\sin x| < \frac{1}{2}, \ |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, \ |\sin x| = \frac{1}{2}, \ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; \\ 0, \ |\sin x| > \frac{1}{2}, \ \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}, \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{Z})$, to su tačke $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ prekidi prve vrste. ▶

334. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x \arctan(n \cot x))$.

◀ Imamo

$$y = \lim\limits_{n\to\infty} (x \arctan(n \cot x)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, \ k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ 0, \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi; \\ -\frac{\pi}{2}x, \ \frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi + \pi, \end{cases}$$

gde $k \in \mathbb{Z}$. Očigledno su $x_k = \frac{k\pi}{2}$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ tačke prekida prve vrste, a $x = 0$ je tačka otklonjivog prekida. ▶

335. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

◀ Pošto je

$$y = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}} = \begin{cases} x^2, \ x > 0; \\ 0, \ x = 0; \\ x, \ x < 0, \end{cases}$$

to se lako vidi da je funkcija neprekidna u svakoj tački domena. ▶

336. Neka je

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ a+x, & x\geq 0. \end{cases}$$

Za koje a je funkcija f neprekidna?

◀ Funkcija je očigledno neprekidna za svako $x \neq 0$. Pošto je $f(0+0)=a$, $f(0-0)=1$, $f(0)=a$, to je funkcija neprekidna u 0, ako je $a=1$. ▶

337. Ispitati neprekidnost i karakter tačaka prekida sledećih funkcija:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leq x\leq 1; \\ 2-x^2, & 1<x\leq 2; \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leq 1; \\ 1, & |x|>1; \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & |x|\leq 1; \\ |x-1|, & |x|>1; \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \cot^2 \pi x, & x\notin \mathbb{Z}; \\ 0, & x\in \mathbb{Z}; \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x, & x\in \mathbb{Q}; \\ 0, & x\in \mathbb{I}. \end{cases}$

◀ a) Pošto je $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$, to je funkcija neprekidna za $x=1$. Za ostale vrednosti promenljive neprekidnost je očigledna.

b) Imamo $f(-1-0)=+1, f(-1+0)=f(-1)=-1$, sledi $x=-1$ je prekid prve vrste. Dalje, $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=1$, pa su 1 i sve ostale tačke domena, tačke neprekidnosti funkcije.

c) Jasno je da treba ispitati neprekidnost samo u tačkama 1 i -1. Funkcija je neprekidna za $x=1$, jer je $f(+1-0)=f(+1+0)=f(+1)=0$; tačka $x=-1$ je prekid prve vrste, jer je $f(-1-0)=2, f(-1+0)=f(-1)=0$.

d) Pošto je $\lim\limits_{x\to k}\left|\cot^2 \pi x\right|=+\infty \ (k\in\mathbb{Z})$, to je $x=k$ tačka beskonačnog prekida.

e) Neka je $x_0\neq n \ (n\in\mathbb{Z})$ proizvoljno, i neka je x_n niz racionalnih brojeva koji konvergira ka x_0, a x_n' niz iracionalnih brojeva koji konvergira takođe ka x_0. Iz relacija

$$\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n=\sin\pi x_0\neq 0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n'=0$$

sleduje, da $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ne postoji, tj. x_0 je tačka prekida.

Ako je $x_0=n$, gde je n ceo broj, imamo

$$\begin{aligned} |f(x_0)-f(x)| &= |f(x)|\leq|\sin\pi x|=|\sin(\pi n+\pi(x-n))| \\ &= |\cos\pi n\cdot\sin\pi(x-n)|=|\sin\pi(x-x_0)|<\pi|x-x_0|<\varepsilon, \end{aligned}$$

ako je $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{\pi}=\delta(\varepsilon,x_0)$, tj. $x_0=n$ je tačka neprekidnosti. Na taj način, tačke $x\neq n$ su prekidi druge vrste. ▶