Uvod u analizu (M3-02)
30. XII 2016. – 13. I 2017.
dr Nenad Teofanov

## 1. Funkcije - neprekidnost

U ovom predavanju se uvodi pojam neprekidnosti i proučavaju osnovna svojstva neprekidnih funkcija.

Za razliku od granične vrednosti koja može da postoji u tački u kojoj funkcija nije definisana (a koja mora da bude tačka nagomilavanja domena te funkcije), neprekidnost se definiše u tački koja mora da pripada domenu date funkcije. Prema tome, čak i kada je domen date funkcije čitav skup $\mathbb{R}$, nije moguće posmatrati neprekidnost u fiktivnim elementima $\pm\infty$. Osim toga, domen može da sadrži tačke koje nisu njegove tačke nagomilavanja. To su izolovane tačke domena. U takvim tačkama nije moguće posmatrati graničnu vrednost neke funkcije, ali je svaka funkcija, kao što će se videti, neprekidna u izolovanim tačkama svog domena.

Takozvana *epsilon–delta* definicija neprekidnosti funkcije u nekoj tački obuhvata navedene primedbe.

**Definicija 1.1.** *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in X$. Funkcija $f$ je neprekidna u tački $x_0$ ako važi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Sada je lako navesti i ekvivalentnu, topološku definiciju:

**Definicija 1.2.** *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in X$. Funkcija $f$ je neprekidna u tački $x_0$ ako važi*

$$(\forall \mathcal{O}(f(x_0)))(\exists \mathcal{O}(x_0))(\forall x \in X)(x \in \mathcal{O}(x_0) \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{O}(f(x_0))).$$

Upoređivanjem definicija 1.1 i 1.2 sa odgovarajućim definicijama granične vrednosti može se izvesti zaključak da, ako je realan broj $x_0 \in X$ tačka nagomilavanja domena $X$ funkcije $f$, onda je funkcija $f$ neprekidna u $x_0$ ako i samo ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dakle, funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna u $x_0 \in X$ koja je pri tome tačka nagomilavanja skupa $X$ ako i samo ako postoji granična vrednost funkcije $f$ u toj tački i ako je ta granična vrednost jednaka sa $f(x_0)$.

Na primer, $f(x) = |\mathrm{sgn}\, x|$ ima graničnu vrednost u $x_0 = 0$ i

$$\lim_{x \to 0} |\mathrm{sgn}\, x| = 1 \neq 0 = f(0).$$

Prema tome, funkcija $|\mathrm{sgn}\, x|$ nije neprekidna u nuli.

Ako tačka $x_0 \in X$ nije tačka nagomilavanja skupa $X$ onda neprekidnost nije moguće dovesti u vezu sa graničnom vrednošću. U tom slučaju $x_0$ je izolovana tačka skupa $X$ pa, po definiciji, postoji $\delta > 0$ tako da je

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}.$$

Prema tome, za svaki broj $\varepsilon > 0$ i ovako izabran broj $\delta$ važi

$$(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon).$$

Dakle, funkcija je neprekidna u svakoj izolovanoj tački domena.

Ako se uvedu oznake $\Delta x = |x - x_0|$ za priraštaj nezavisne promenljive u tački $x_0$ i $\Delta f(x) = \Delta y = |f(x) - f(x_0)|$ za odgovarajući priraštaj zavisne promenljive $y$ u tački $x_0$, onda se definicija (1) može napisati u obliku

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

odakle sledi da je funkcija $f$ neprekidna u $x_0$ ako i samo ako priraštaj zavisne promenljive teži ka nuli kada priraštaj nezavisne promenljive teži ka nuli.

Ukoliko je potrebno da se posebno istakne tačka u kojoj se ispituje neprekidnost, koriste se oznake $\Delta_{x_0} x$ i $\Delta_{x_0} y$.

Kao i kod graničnih vrednosti i kod neprekidnosti je moguće ograničiti se na $\delta-$okoline tačke $x_0$ za koje je broj $\delta$ manji od nekog unapred zadatog pozitivnog broja. To se vidi iz sledećih primera.

**Primer 1.3.** *Ispitajmo neprekidnost funkcije $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ u tački $x_0 \neq 0$.*

*Neka je dato $\varepsilon > 0$. Kako je*

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x x_0|},$$

*iz $\Delta x = |x_0 - x| < |x x_0|\varepsilon$ sledi $\Delta y < \varepsilon$. Međutim, $\delta$ u definiciji neprekidnosti može da zavisi od $x_0$ i $\varepsilon$, ali ne od vrednosti nezavisne promenljive $x$ (koja pripada nekom intervalu, to jest koja se menja).*

*Da bi se ovaj problem prevazišao, potrebno je shvatiti da se uslov $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ u (1) može pojačati tako da se posmatraju samo one tačke $x$ koje pripadaju nekoj unapred određenoj okolini tačke $x_0$. Na primer, za $x_0 > 0$, dovoljno je posmatrati $x \in (x_0/2, 3x_0/2)$ (slično, za $x_0 < 0$ može se posmatrati samo $(3x_0/2, x_0/2)$). Tada je $|x_0|/2 < |x| < 3|x_0|/2$, pa ako se za zadato $\varepsilon > 0$ izabere $\delta = \min\{|x_0|^2\varepsilon/2, |x_0|/2\}$ onda iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $\Delta y < \varepsilon$, odakle sledi neprekidnost u tački $x_0$.*

*Primetimo da $\delta$ zavisi od $x_0$, pri čemu je $\delta$ "blizu" nule kada je $x_0$ "blizu" nule.*

**Primer 1.4.** *Ispitajmo neprekidnost kvadratne funkcije* $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$, *u nekoj zadatoj tački* $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Neka je dato* $\varepsilon > 0$. *Kako je*

$$\begin{aligned} \left|ax^2 + bx + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)\right| &= \left|a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)\right| \\ &= |x_0 - x||a(x + x_0) + b|, \end{aligned}$$

*ako se pomatraju samo tačke* $x \in \mathbb{R}$ *za koje je* $|x - x_0| < 1$, *onda je* $|x| < |x_0| + 1$, *pa je*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |x_0 - x|(|a||x + x_0| + |b|) \\ &< |x_0 - x|(|a|(2|x_0| + 1) + |b|), \end{aligned}$$

*pa ako je* $\delta = \varepsilon/(|a|(2|x_0| + 1) + |b|)$, *onda iz*

$$|x_0 - x| < \delta = \varepsilon/(|a|(2|x_0| + 1) + |b|)$$

*sledi* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

*Primetimo da* $\delta$ *zavisi od izbora tačke* $x_0$, *ali ne sme da zavisi od vrednosti nezavisne promenljive* $x$. *Iz ovog razloga je uvedeno ograničenje* $|x| < |x_0| + 1$.

Prethodni primer je poseban slučaj tvrđenja da je svaki polinom $P_n(x)$ neprekidna funkcija u svakoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$. Opštije, svaka elementarna funkcija je neprekidna u svakoj tački svog domena. Ovu činjenicu usvajamo bez dokaza.

**Primer 1.5.** *Ispitajmo neprekidnost funkcije najveći ceo deo* $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, *u nekoj zadatoj tački* $x_0 \in \mathbb{Z}$.

*Podsetimo se,* $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, *odnosno* $\lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z}$ *ako i samo ako je* $k \leq x < k + 1$.

*Tačka* $x_0 \in \mathbb{Z}$ *je tačka nagomilavanja domena koja mu priprada pa se neprekidnost može ispitati posmatranjem granične vrednosti. Kako je* $\lim_{x \to x_0+} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor = x_0$, *a* $\lim_{x \to x_0-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1$, *funkcija nema graničnu vrednost u* $x_0$, *odakle sledi da ona nije neprekidna u* $x_0$.

*Za vežbu dokazati da je ova funkcija neprekidna u svakoj tački* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Prethodni primer motiviše sledeću definiciju.

**Definicija 1.6.** *Neka je data funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *i neka* $x_0 \in X$.

*Funkcija* $f$ *je neprekidna sa desne strane u tački* $x_0$ *ako važi*

(2)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

*a neprekidna sa leve strane u tački* $x_0$ *ako važi*

(3)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Iz definicija 1.1 i 1.6 sledi da je funkcija $f$ neprekidna u tački $x_0$ ako i samo ako je u $f$ neprekidna i sa leve i sa desne strane u tački $x_0$.

Neprekidnost funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ na skupu $A \subset X$ se uvodi na uobičajen način.

**Definicija 1.7.** *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $A \subset X$.*

*Funkcija $f$ je neprekidna na skupu $A$ ako i samo ako je $f$ neprekidna u svakoj tački $x_0 \in A$, to jest ako važi*

(4)

$$(\forall x_0 \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

U posebnom slučaju, $f$ je neprekidna na $A = [a, b] \subset X$, ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački $x_0 \in (a, b)$, i ako je neprekidna sa desne strane u tački $a$, a neprekidna sa leve strane u tački $b$.

**Definicija 1.8.** *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka $x_0 \in X$.*

*Funkcija $f$ ima prekid u tački $x_0$ ako $f$ nije neprekidna u $x_0$, odnosno ako važi*

$$(5) \qquad (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in X)(|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

*U tom slučaju, tačka $x_0$ naziva se tačka prekida funkcije $f$.*

Tačka prekida je uvek tačka nagomilavanja domena, pa iz definicije 1.8 sledi da funkcija $f$ ima prekid u $x_0$ ako u toj tački postoji granična vrednost koja je različita od $f(x_0)$ ili ako ne postoji granična vrednost funkcije $f$ u $x_0$. Ova primedba ima za posledicu sledeću klasifikaciju tačaka prekida.

**Definicija 1.9.** *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in X$ tačka prekida funkcije $f$.*

*Ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$, onda je $x_0$ tačka otklonjivog prekida funkcije $f$. U tom slučaju je funkcija $\tilde{f}$ definisana sa*

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{x_0\} \\ L, & x = x_0, \end{cases}$$

*neprekidna u $x_0$.*

*Ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije $f$ u $x_0$ i*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) \neq f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

*onda je $x_0$ tačka prekida prve vrste funkcije $f$ i kaže se da funkcija $f$ ima skok u $x_0$.*

*Ako ne postoji (leva ili desna) granična vrednost funkcije $f$ u $x_0$ onda je $x_0$ tačka prekida druge vrste funkcije $f$.*

Dakle, funkcija tačka $x_0 = 0$ je tačka otklonjivog prekida funkcije $|\text{sgn}x|$, $x \in \mathbb{R}$, a svaki ceo broj $k \in \mathbb{Z}$ je tačka prekida prve vrste funkcije najveći ceo deo $\lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$.

Funkcija $f(x) = \sin x/x$ nije definisana u nuli, ali se može odrediti nova funkcija $\tilde{f}$ definisana na $\mathbb{R}$ koja je jednaka sa $f$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i koja je neprekidna na $\mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x/x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Funkcija koja je data sa $\sin(1/x)$, $x \neq 0$, a koja je jednaka nuli za $x = 0$ ima prekid druge vrste u $x_0 = 0$, što će se pokazati nakon sledeće teoreme u kojoj se pojam neprekidnosti funkcije u $x_0$ dovodi u vezu sa graničnom vrednosti slika nizova koji konvergiraju ka $x_0$.

**Teorema 1.10.** *Neka je data funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in X$. Tada je $f$ neprekidna u $x_0$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata skupa $X$ za koji je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, važi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Dokaz teoreme 1.10 je sličan dokazu odgovarajuće karakterizacije graničnih vrednosti preko nizova, i ostavlja se čitaocu za vežbu.

Na osnovu teoreme 1.10 lako se dokazuju značajna svojstva neprekidnosti po analogiji sa odgovarajućim svojstvima konvergentnih nizova.

Karakterizacija limesa funkcije iz teoreme 1.10 se često koristi pri dokazivanju da funkcija nema limes u $x_0$. Za to je dovoljno uočiti dva niza koji konvergiraju ka $x_0$ pri čemu nizovi njihovih slika ne konvergiraju ka istoj vrednosti.

Tako, na primer,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ima prekid druge vrste u $x_0 = 0$, jer ne postoji granična vrednost funkcije $f$ u toj tački. Za to je dovoljno uočiti nizove $x_n = \frac{2}{4n+1}\pi^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ i $y_n = \frac{2}{4n+3}\pi^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, koji konvergiraju ka $x_0 = 0$, ali

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{4n+1}{2}\pi = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{4n+3}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Čitaocu se ostavlja za vežbu da odredi i klasifikuje tačke prekida Dirihleove funkcije.

## 2. Lokalna svojstva neprekidih funkcija

U ovom predavanju proučavaju se lokalna svojstva neprekidnih funkcija. U nastavku se, jednostavnosti radi, pretpostavlja da su posmatrane funkcije definisane u nekoj okolini tačke $x_0$ u kojoj su one neprekidne.

**Teorema 2.1.** *Neka je funkcija $f$ neprekidna u $x_0$ i definisana u nekoj okolini tačke $x_0$. Tada postoji okolina tačke $x_0$ u kojoj je $f$ ograničena.*

*Dokaz.* Neka je $f$ definisana na skupu $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$. Ako u definiciji neprekidnosti izaberemo neki broj $\varepsilon > 0$, na primer $\varepsilon = 1$, onda postoji $\delta \in (0, \delta_1]$ tako da je

$$f(x) \in (f(x_0) - 1, f(x_0) + 1) \quad \textit{zasve} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

čime je teorema dokazana. □

**Teorema 2.2.** *Neka je funkcija $f$ neprekidna u $x_0$, definisana u nekoj okolini tačke $x_0$ i neka je $f(x_0) \neq 0$. Tada postoji okolina tačke $x_0$ tako da za sve $x$ iz te okoline $f(x)$ ima isti znak kao i $f(x_0)$.*

*Dokaz.* Neka je $f$ definisana na skupu $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ i neka je, na primer $f(x_0) > 0$. Ako u definiciji neprekidnosti izaberemo $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$, onda postoji $\delta \in (0, \delta_1]$ tako da je $f(x) \in (f(x_0)/2, 3f(x_0)/2)$ za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, čime je teorema dokazana. □

**Teorema 2.3.** *Neka su funkcije $f$ i $g$ definisane na nekom skupu $X \subset \mathbb{R}$ i neprekidne u nekoj tački $x_0 \in X$. Tada su funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$ i $\min(f, g)$ takođe neprekidne $x_0$. Ako je, pri tome $g(x_0) \neq 0$, onda je i $f/g$ neprekidna funkcija u $x_0$.*

*Dokaz. (Zbir dve funkcije)* Kako je

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|,$$

za zadato $\varepsilon > 0$ postoje $\delta_f > 0$ i $\delta_g > 0$ tako da za sve $x \in X$ važi

$$|x-x_0| < \delta_f \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/2, \quad |x-x_0| < \delta_g \Longrightarrow |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2,$$

pa, ako je $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ onda za sve $x \in X$ iz $|x - x_0| < \delta$ sledi

$$|(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| < \varepsilon,$$

pa je zbir neprekidnih funkcija u $x_0$ neprekidna funkcija u $x_0$.

*(Proizvod dve funkcije)* Kako je

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &= |(fg)(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - (fg)(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)||g(x)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)|, \end{aligned}$$

za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_g > 0$ tako da za sve $x \in X$ važi

$$|x - x_0| < \delta_g \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|},$$

za $f(x_0) \neq 0$. Ako je $f(x_0) = 0$ onda je $|f(x_0)||g(x) - g(x_0)| = 0$, pa se procenjuje samo prvi sabirak.

Dalje, iz neprekidnosti funkcije $g$ u $x_0$ sledi njena ograničenost u nekoj okolini tačke $x_0$, to jest postoji $\tilde{\delta}_g > 0$ tako da za sve $x \in X$ iz $|x - x_0| < \tilde{\delta}_g$ sledi da je $|g(x)| \leq M$ za neko $M > 0$.

S obzirom da je $f$ neprekidna u $x_0$, sledi da postoji $\delta_f > 0$ tako da je

$$|f(x) - f(x_0)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}|g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}M = \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in (x_0 - \delta_f, x_0 + \delta_f) \cap X.$$

Ako je $\delta = \min\{\delta_g, \tilde{\delta}_g, \delta_f\}$ onda za sve $x \in X$ iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|(fg)(x) - (fg)(x_0)| < \varepsilon$, pa je proizvod neprekidnih funkcija u $x_0$ neprekidna funkcija u $x_0$.

*(Maksimum dve funkcije)* Za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka iz $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tada postoje 4 moguća slučaja:

1) $\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = f(x_0)$,
2) $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = g(x_0)$,
3) $\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = g(x_0)$,
4) $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$, $\max\{f(x_0), g(x_0)\} = f(x_0)$.

U slučajevima 1) i 2) direktno sledi

$$|\max\{f(x), g(x)\} - \max\{f(x_0), g(x_0)\}| < \varepsilon.$$

U slučaju 3) važi:

$$g(x) - g(x_0) \leq f(x) - g(x_0) \leq f(x) - f(x_0),$$

odakle je $|f(x) - g(x_0)| \leq \max\{|g(x) - g(x_0)|, |f(x) - f(x_0)|\}$, pa je

$$|\max\{f(x), g(x)\} - \max\{f(x_0), g(x_0)\}| = |f(x) - g(x_0)|$$
$$\leq \max\{|g(x) - g(x_0)|, |f(x) - f(x_0)|\} < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X.$$

Slično se dokazuje i 4).

Čitaocu se ostavlja za vežbu da dokaže preostala tvrđenja teoreme. $\square$

**Teorema 2.4.** *(neprekidnost složene funkcije) Neka su dati skupovi $X, Y \subset \mathbb{R}$ i funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to \mathbb{R}$ tako da je $f$ neprekidna u nekoj tački $x_0 \in X$, a $g$ neprekidna u $y_0 = f(x_0)$. Tada je funkcija $h = g \circ f$ neprekidna u $x_0 \in X$.*

*Dokaz.* Neka je dato $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta_g > 0$ tako da je

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \quad \text{za sve} \quad y \in (y_0 - \delta_g, y_0 + \delta_g) \cap Y.$$

Za tako odabranu vrednost $\delta_g$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$f(x) \in (y_0 - \delta_g, y_0 + \delta_g) \cap Y \quad \text{za sve} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X.$$

Prema tome,

$$|h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X,$$

čime je teorema dokazana. □

## 3. Globalna svojstva neprekidih funkcija

Podsetimo se, funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je neprekidna na skupu $A \subset X$ ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa. Pri tome, ako je za $a \in A$ funkcija $f$ definisana samo na $(a, \infty) \cap X$ posmatra se neprekidnost sa desne strane u $a$, a ako je za $b \in A$ funkcija $f$ definisana samo na $(-\infty, b) \cap X$ posmatra se neprekidnost sa leve strane u $b$. Dakle, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je neprekidna na $[a, b]$ ako je neprekidna u svakoj tački $x \in (a, b)$, i $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

**Teorema 3.1.** *Neka je data funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, gde je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}$. Tada je funkcija $f$ neprekidna na skupu $A$ ako i samo ako je za svaki otvoren skup $B \subset \mathbb{R}$ njegova inverzna slika*

$$f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subset A,$$

*otvoren skup u $\mathbb{R}$.*

Analogno tvrđenje važi i za zatvorene skupove.

*Dokaz.* Neka je $f$ neprekidna na $A$ i neka je $B$ proizvoljan otvoren skup u $\mathbb{R}$. Ako ne postoji $a \in A$ tako da je $f(a) \in B$, onda je $f^{-1}(B) = \emptyset$, a to je otvoren skup. Prema tome, pretpostavimo da $f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Znači, postoji $x \in A$ za koje je $f(x) = b \in B$.

Treba da se dokaže da je $f^{-1}(B)$ okolina svake svoje tačke, odnosno da za proizvoljan element $x \in f^{-1}(B)$ postoji okolina tog elementa $\mathcal{O}(x)$ tako da iz $y \in \mathcal{O}(x)$ sledi $f(y) \in B$.

Neka je, dakle $x \in f^{-1}(B)$ i $b = f(x) \in B$. Iz neprekidnosti funkcije $f$ u tački $x$ sledi da za svaku okolinu $\mathcal{V}(b) \subset B$ tačke $b$ postoji okolina $\mathcal{O}(x) \subset A$ tako da je $f(\mathcal{O}(x)) \subset \mathcal{V}(b)$. Prema tome,

$$f^{-1}(B) \supset f^{-1}(\mathcal{V}(b)) \supset \mathcal{O}(x),$$

pa iz $y \in \mathcal{O}(x)$ sledi $f(y) \in \mathcal{V}(b) \subset B$ odnosno $y \in f^{-1}(B)$, to jest skup $f^{-1}(B)$ je otvoren.

Neka sada za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$, gde je $A$ otvoren skup u $\mathbb{R}$ važi da je za svaki otvoren skup $B \subset \mathbb{R}$ njegova inverzna slika $f^{-1}(B)$ otvoren skup u $\mathbb{R}$. Dokažimo da je $f$ tada neprekidna u proizvoljnoj tački $x \in A$.

Neka je $\mathcal{V}(f(x))$ proizvoljna okolina tačke $f(x)$. To je otvoren skup pa je $f^{-1}(\mathcal{V}(f(x)))$ otvoren skup koji sadrži $x$. To znači da postoji $\mathcal{O}(x)$, okolina tačke $x$ za koju važi $\mathcal{O}(x) \subset f^{-1}(\mathcal{V}(f(x)))$. Dakle, za sve $y \in \mathcal{O}(x)$ važi $f(y) \in \mathcal{V}(f(x))$, pa je $f$ neprekidna u $x$. □

U nastavku se dokazuje Bolcano-Košijeva teorema:

**Teorema 3.2.** *Neka je data funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$. Tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je $f(c) = 0$.*

Prema tome, Bolcano-Košijeva teorema navodi jedan dovoljan uslov za egzistenciju rešenja jednačine $f(x) = 0$ na nekom intervalu.

Direktna posledica ove teoreme je takozvana *teorema o srednjoj vrednosti.*

**Posledica 3.3.** *Neka je data funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ i $A < B$ ($B < A$, respektivno). Tada za svaki broj $C \in (A, B)$ ($C \in (B, A)$, respektivno) postoji $c \in (a, b)$ tako da je $f(c) = C$.*

*Dokaz. (dokaz posledice)* Posmatra se funkcija $g(x) = f(x) - C$. Ona je neprekidna na $[a, b]$ i važi:

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - C)(f(b) - C) = (A - C)(B - C) < 0.$$

Iz teoreme 3.2 sledi da postoji $c \in (a, b)$ tako da je $g(c) = 0$, odnosno $f(c) - C = 0$, pa je $f(c) = C$. □

*Dokaz. (dokaz teoreme 3.2)* Neka je, na primer, $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$ i neka je $I_1 = [a, b]$. Tada je dužina datog intervala jednaka $|I_1| = b - a$.

Posmatra se tačka $(a + b)/2$. Ako je $f((a + b)/2) = 0$, onda je $c = (a + b)/2$ i tvrđenje je dokazano. Nasuprot tome, može da se desi da je $f((a + b)/2) > 0$ ili da je $f((a + b)/2) < 0$.

Ako je $f((a + b)/2) > 0$, onda se posmatra interval $I_2 = [a_1, b_1] = [(a + b)/2, b]$. Važi $f(a_1) > 0$ i $f(b_1) < 0$.

Ako je $f((a + b)/2) < 0$, onda se posmatra interval $I_2 = [a_1, b_1] = [a, (a + b)/2]$. Važi $f(a_1) > 0$ i $f(b_1) < 0$.

Dakle, sada se posmatra neprekidna funkcija $f$ na $I_2 = [a_1, b_1]$ za koju važi $f(a_1)f(b_1) < 0$ i tačka $(a_1 + b_1)/2$.

Ako je $f((a_1 + b_1)/2) = 0$, onda je $c = (a_1 + b_1)/2$ i tvrđenje je dokazano. Nasuprot tome, može da se desi da je $f((a_1 + b_1)/2) > 0$ ili da je $f((a_1 + b_1)/2) < 0$.

Ako je $f((a_1 + b_1)/2) > 0$, onda se posmatra interval $I_3 = [a_2, b_2] = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$. Važi $f(a_2) > 0$ i $f(b_2) < 0$.

Ako je $f((a_1+b_1)/2)<0$, onda se posmatra interval $I_3=[a_2,b_2]=[a_1,(a_1+b_1)/2]$. Važi $f(a_2)>0$ i $f(b_2)<0$.

Sada se posmatra neprekidna funkcija $f$ na $I_3=[a_2,b_2]$ za koju važi $f(a_2)f(b_2)<0$ i tačka $(a_2+b_2)/2$. Ako je $f((a_2+b_2)/2)=0$, onda je $c=(a_2+b_2)/2$ i tvrđenje je dokazano. U suprotnom, nastavljamo sa podelom intervala $I_3$ i biranjem intervala $I_4=[a_3,b_3]$ tako da je $f(a_3)>0$ i $f(b_3)<0$.

Ako se, primenom navedenog postupka dobije $f((a_n+b_n)/2)=0$ za neki prirodan broj $n\in\mathbb{N}$, onda je tvrđenje dokazano. U suprotnom, dobija se niz umetnutih intervala $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ pri čemu je $f(a_n)>0$ i $f(b_n)<0$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Na osnovu Kantorovog principa sledi da postoji $c\in\mathbb{R}$ koji pripada svim intervalima $[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$. Pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(Čitalac bi trebalo da bude u stanju da samostalno argumentuje ove činjenice.)

Iz neprekidnosti funkcije $f$ i $f(a_n)>0$ za sve $n\in\mathbb{N}$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(c)\geq 0$, a iz neprekidnosti funkcije $f$ i $f(b_n)<0$ za sve $n\in\mathbb{N}$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)\leq 0$.

Dakle, $f(c)=0$, čime je teorema dokazana ako je $f(a)>0$ i $f(b)<0$.

Slučaj $f(a)<0$ i $f(b)>0$ se dokazuje na analogan način. □

Prethodna teorema ne daje nikakvu informaciju o broju tačaka $c$ za koje je $f(c)=0$. Uz neki dodatni uslov, na primer stroge monotonosti, moguće je dokazati jedinstvenost rešenja jednačine $f(x)=0$ na intervalu $[a,b]$ ako je $f(a)f(b)<0$.

Konačno, važi i Vajerštrasova teorema:

**Teorema 3.4.** *Neka je data funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ koja je neprekidna na $[a,b]$. Tada važi:*

1) *$f$ je ograničena na $[a,b]$.*
2) *$f$ dostiže svoj infimum i supremum na $[a,b]$, to jest skup*

$$f([a,b])=\{f(x)\ \mid\ x\in[a,b]\}$$

*ima minimalni i maksimalni element.*

*Dokaz.* 1) Dokaz izvodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da je $f$ neprekidna funkcija koja nije ograničena sa gornje strane na $[a,b]$. To znači da postoji niz (međusobno različitih) tačaka $x_n\in[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$, tako da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.