

2.59. Izračunati granične vrednosti:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + \cdots + n)}{n^3};$$

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \cdots + \frac{(4n-1)^3}{n^4} \right);$$

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}).$$

Rešenje.

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)}{2n^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) = \frac{1}{6};$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{4n-1} k^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{(4n-1) \cdot 4n}{2} \right)^2}{n^4} = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(4n-1)^2}{n^2} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{n} \right)^2 = 4^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})(\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \sqrt{n} - n + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1. \end{aligned}$$

Primedba. Primena Stolzove teoreme (1.1.2.22) omogućuje lakše dobijanje prethodnih vrednosti za L_1 i L_2 , kao i rezultata u 2.58.

2.60. Odrediti granične vrednosti nizova:

$$1^\circ a_n = \frac{n^2}{a^n} \quad (a > 0); \quad 2^\circ a_n = \frac{\log n}{n};$$

$$3^\circ a_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > -1);$$

$$4^\circ a_n = \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} \cdot \frac{n}{p+1} \quad (p > 0);$$

$$5^\circ a_n = \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} \quad (p > -1).$$

Rezultat. $3^\circ \frac{1}{p+1}; \quad 4^\circ \frac{1}{2}; \quad 5^\circ \frac{2^p}{p+1}.$

2.61. Odrediti granične vrednosti

$$1^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+2)(k+4)}{\sum_{k=1}^n k(2k+1)(k+2)}; \quad 2^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2(k+1)}{\sum_{k=1}^n k(k+3)(2k+1)}$$

2.62. Ispitati da li su nizovi, čiji su opšti članovi

$$1^\circ a_n = \sqrt[n^3]{n^3(\sqrt{n^4+4}-n^2)}; \quad 2^\circ a_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n},$$

nula-nizovi.

Rešenje. 1° Niz (a_n) je nula niz ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N(\varepsilon) > 0$ takav da je $|a_n| < \varepsilon$ za $n > N(\varepsilon)$.

Kako je

$$a_n = \frac{4\sqrt[n^3]{n^3}}{\sqrt[n^3]{n^3+4}+n^2} < \frac{4\sqrt[n^3]{n^3}}{2n^2} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}},$$

biće $|a_n| < \varepsilon$ ako je

$$\frac{2}{\sqrt[n]{n}} < \varepsilon \quad \left(\Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2} \right).$$

Prema tome, za $N(\varepsilon)$ možemo uzeti $N(\varepsilon) = \max\left(\left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil, 1\right)$.

2.63. Odrediti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \right)$.

Rešenje.

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}.$$

Oдавде je

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < 1.$$

Pošto je $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$, dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} \right) = 1.$$

2.64. Da li su tačne jednakosti

$$1^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} = \operatorname{sgn} x; \quad 2^\circ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx = \operatorname{sgn} x?$$

2.65. Ako je $f(x) = x^2 + x + 1$, odrediti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \log \frac{f(n+1)}{f(n)} \right)$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \log \frac{f(n+1)}{f(n)} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \log \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \log \left(1 + \frac{2n+2}{n^2 + n + 1} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{2n+2}{n^2 + n + 1} = 2. \end{aligned}$$

Ovde je primenjena relacija $\log(1+t) \sim t$ ($t \rightarrow 0$).

2.66. Dat je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pomoću

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -6.$$

Naći a_n i ispitati konvergenciju datog brojnog niza.

Rezultat. $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ ($n = 1, 2, \dots$). Niz je divergentan.

2.67. Ispitati monotoniju i konvergenciju niza

$$a_1 > 0, \quad a_n = \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^2 + 3a)}{3a_{n-1}^2 + a} \quad (n = 2, 3, \dots; a > 0).$$

Rešenje. Stavljajući

$$(1) \quad a_n = b_n \sqrt{a} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dobijamo

$$(2) \quad b_n = \frac{b_{n-1}^3 + 3b_{n-1}}{3b_{n-1}^2 + 1} \quad (n = 2, 3, \dots), \quad b_1 > 0,$$

i dalje

$$b_n - 1 = \frac{b_{n-1}^3 + 3b_{n-1} - 3b_{n-1}^2 - 1}{3b_{n-1}^2 + 1} = \frac{(b_{n-1} - 1)^3}{3b_{n-1}^2 + 1}.$$

Dakle, $b_n \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) prema tome da li je $b_1 \leq 1$.

Pod pretpostavkom $b_1 \neq 1$ dobijamo

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n-1}^2 + 3}{3b_{n-1}^2 + 1} = 1 + \frac{2(1 - b_{n-1}^2)}{3b_{n-1}^2 + 1} \geq 1, \quad b_1 \leq 1,$$

što znači da niz b_n ($n = 1, 2, \dots$) strogo opada ili raste prema tome da li je $b_1 > 1$ ili $b_1 < 1$.

Iz prethodnih činjenica izlazi da niz (b_n) u svim slučajevima ima konačnu i pozitivnu graničnu vrednost x . Puštajući u (2) da $n \rightarrow +\infty$, dobijamo

$$x = \frac{x(x^2 + 3)}{3x^2 + 1} \quad (x > 0), \quad \text{ili} \quad 3x^2 + 1 = x^2 + 3, \quad \text{tj.} \quad x = 1.$$

Uzevši u obzir (1), na kraju možemo za niz a_n ($n = 1, 2, \dots$) reći da strogo raste, strogo opada ili je konstantan prema tome da li je $a_1 < \sqrt{a}$, $a_1 > \sqrt{a}$ ili $a_1 = \sqrt{a}$, i da je, u sva tri slučaja, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{a}$.

2.68. Da li su konvergentni sledeći nizovi:

$$1^\circ \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}); \quad 2^\circ \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) \quad (n = 1, 2, \dots)?$$

Ako jesu, naći njihove granične vrednosti.

Rezultat. $1^\circ 0; 2^\circ 1$.

2.69. Ispitati konvergenciju niza

$$u_1 = \frac{a^a}{(a+1)^{a+1}}, \quad u_n = \frac{u_1}{(1 - u_{n-1})^a} \quad (n > 1; a > 0).$$

Rešenje. Imamo $0 < u_1 < 1$, i stoga

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{(1 - u_1)^a} > 1.$$

Kako je još

$$(1) \quad f(t) = \frac{u_1}{(1 - t)^a} \uparrow \quad (t < 1),$$

posmatrani niz raste, pod uslovom da je definisan za svako n . Pod poslednjom pretpostavkom, granična vrednost t ovog niza je koren jednačine $g(t) \equiv f(t) - t = 0$. Budući da je

$$g'(t) = \frac{au_1}{(1 - t)^{a+1}} - 1 = 0$$

samo za $t = t_0 = \frac{1}{a+1}$ i $g(t_0) = 0$, zaključujemo da je t_0 jedini koren jednačine $g(t) = 0$.

Zbog $u_1 = \left(\frac{a}{1+a}\right)^a \frac{1}{1+a} < t_0$ i s obzirom na (1), imamo dalje

$$u_n < t_0 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) < f(t_0) = t_0.$$

Prema tome, dati niz definisan je za svako n i $u_n < t_0 (< 1)$ za svako n . Iz svega prethodnog izlazi

da taj niz konvergira i da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1+a}$.

Primedba. Na osnovu prethodnog rešenja, lako se može ustanoviti da, opštije, niz

$$u_1 < \frac{1}{a+1}, \quad u_n = \frac{u_1}{(1 - u_{n-1})^a} \quad (n > 1; a > 0)$$

striktno raste i konvergira ka $\frac{1}{a+1}$.

2.70. Trougao T_n ima temena A_n, B_n i C_n sa odgovarajućim uglovima α_n, β_n i γ_n . Neka je K_n upisani krug u trouglu T_n . Niz trouglova $T_1, \dots, T_n, \dots$ dat je na sledeći način:

$1^\circ T_1$ je proizvoljan trougao;

$2^\circ T_n (n \geq 2)$ se dobija od T_{n-1} kada se za A_n, B_n i C_n redom uzmu dodirne tačke kruga K_{n-1} sa stranicama $B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}A_{n-1}$ i $A_{n-1}B_{n-1}$.

Odrediti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$.

Rešenje. Prema slici je

$$2\alpha_n + \alpha_{n-1} = \pi,$$

tj.

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha_{n-1},$$

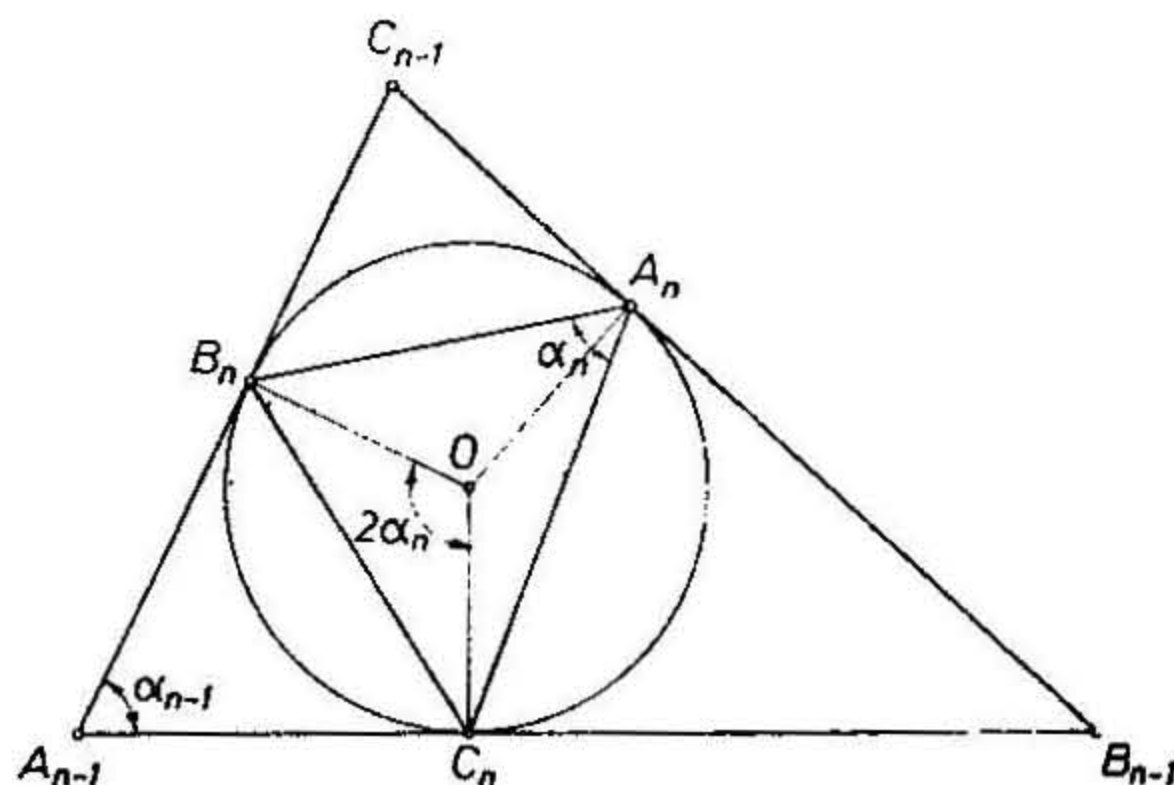
tako da imamo jednakosti

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha_{n-1},$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha_{n-2},$$

...

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha_1.$$



Množeći k -tu od ovih jednakosti sa $\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ ($1 \leq k \leq n-1$) i sabirajući ih potom, dobijamo

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{1}{2^{n-2}} \right) + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \alpha_1.$$

Oдавде,

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \pi.$$

Analogno dobijamo

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \frac{1}{3} \pi, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \frac{1}{3} \pi.$$

Na osnovu (1) i (2), može se reći da trougao T_n «teži» da postane ravnostrani trougao kad $n \rightarrow +\infty$.

2.71. Neka je $\max(a, b) = \begin{cases} a & (a \geq b), \\ b & (a < b). \end{cases}$

Dokazati da $\max(a_n, b_n) \rightarrow \max(a, b)$ ($n \rightarrow +\infty$) ako $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow +\infty$).

Rešenje 1. Neka je $a > b$. Tada je $\frac{1}{2}(a - b) > 0$, pa za dovoljno veliko n imamo

$$a_n > a - \frac{1}{2}(a - b) = b + \frac{1}{2}(a - b) > b_n,$$

što znači da je $\max(a_n, b_n) = a_n$ za n dovoljno veliko, tako da $\max(a_n, b_n) \rightarrow a = \max(a, b)$ ($n \rightarrow +\infty$). Ako je $b > a$, očigledno takođe $\max(a_n, b_n) \rightarrow \max(a, b)$ ($n \rightarrow +\infty$). Ako je $a = b$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo $a_n, b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ukoliko je n dovoljno veliko, pa odatle i $\max(a_n, b_n) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ za n dovoljno veliko, što znači da u tom slučaju $\max(a_n, b_n) \rightarrow a = \max(a, b)$ ($n \rightarrow +\infty$).

Rešenje 2. Imamo

$$\max(a_n, b_n) = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) \rightarrow \frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \max(a, b) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

2.72. 1° Ispitati konvergenciju niza $\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n$, gde je $a_n < n$ ($n = 1, 2, \dots$) i $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$).

2° Čemu teži niz $\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n$ ako $\beta_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) i $\beta_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$)?

Rešenje. 1° Ako je A (> 0) proizvoljno izabrano, za n dovoljno veliko je $a_n > A$, i odatle, s obzirom na $a_n < n$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$0 < 1 - \frac{a_n}{n} < 1 - \frac{A}{n},$$

tj.

$$0 < \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{A}{n}\right)^n.$$

Puštajući ovde prvo da $n \rightarrow +\infty$, pa zatim da $A \rightarrow +\infty$, dobijamo redom sledeće nejednakosti

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \leq e^{-A},$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \leq 0.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n = 0.$$

2° Ako je B (> 0) proizvoljno izabrano, za n dovoljno veliko je $\beta_n > B$, tako da imamo

$$\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{B}{n}\right)^n.$$

Odatle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n \geq e^B,$$

i dalje

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n \geq \lim_{B \rightarrow +\infty} e^B = +\infty,$$

što znači da

$$\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

2.73. Ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, dokazati da je svaka tačka intervala $(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n)$ tačka nagomilavanja niza a_n ($n = 1, 2, \dots$).

Dokaz. Stavimo

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad L = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

i neka je $a \in (l, L)$. Pretpostavimo da a nije tačka nagomilavanja niza a_n ($n = 1, 2, \dots$). Tada postoje brojevi b i c koji zadovoljavaju nejednakost $l < b < a < c < L$ i prirodan broj n_1 tako da za $n > n_1$ imamo $a_n \notin [b, c]$. S druge strane, postoji takav prirodan broj n_2 da $n > n_2$ povlači

$|a_{n+1} - a_n| < c - b$. Kako je l tačka nagomilavanja niza, postoji $m > \max(n_1, n_2)$ takvo da je $a_m < b$. Iz pretpostavke da je $a_n < b$ za neko $n \geq m$ izlazi

$$a_{n+1} \leq a_n + |a_{n+1} - a_n| < b + c - b = c,$$

pa, kako $a_{n+1} \notin [b, c]$, imamo $a_{n+1} < b$. Tako se matematičkom indukcijom ustanovljava da je $a_n < b$ za $n \geq m$. Odatle, $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq b < L$. Dobijena protivurečnost dokazuje teorem.

2.74. 1° Dokazati teoremu:

Neka je $b_{k,n} > 0$ ($k = 1, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$). Ako

$$\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

uniformno u odnosu na k , tj. ako za svako $\varepsilon (> 0)$ postoji takvo m da $n > m$ povlači

$$\left| \frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} - 1 \right| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n),$$

tada je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_{k,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{k,n},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani ima konačnu vrednost.

2° Naći granične vrednosti sledećih nizova:

$$\alpha) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[p]{1 + \frac{k^{q-1}}{n^q}} - 1 \right) \quad (p \neq 0, q > 0);$$

$$\beta) \quad b_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k-1}{n^2} a \quad (a \neq 0);$$

$$\gamma) \quad c_n = \sum_{k=1}^n \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) \quad (a > 0);$$

$$\delta) \quad d_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$$

Rešenje. 1° Ako stavimo

$$\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} = 1 + \varepsilon_{k,n} \quad (k = 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots),$$

imamo

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n a_{k,n} = \sum_{k=1}^n b_{k,n} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,n} b_{k,n}.$$

Iz konačnosti limesa niza $\sum_{k=1}^n b_{k,n}$ izlazi da postoji takvo konačno $M > 0$ da je

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n b_{k,n} \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano. U saglasnosti sa pretpostavkom, postoji m takvo da

$$|\varepsilon_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (n > m; k = 1, \dots, n).$$

Dalje imamo, s obzirom na (2), za $n > m$

$$\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,n} b_{k,n} \right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{k=1}^n b_{k,n} \leq \varepsilon.$$

To znači da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,n} b_{k,n} = 0$. Iz (1) onda izlazi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_{k,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n b_{k,n}.$$

Primedba 1. Uslov $b_{k,n} > 0$ ($k = 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots$) može se zameniti uslovom da $b_{k,n}$ ne menja znak za dovoljno veliko n .

Primedba 2. Količnik $a_{k,n}/b_{k,n}$ svakako konvergira ka 1 uniformno u odnosu na k ako je

$$a_{k,n} = f(c_{k,n}), \quad b_{k,n} = g(c_{k,n}) \quad (k = 1, \dots, n; n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

gde $c_{k,n}$ uniformno u odnosu na k teži ka nuli kad $n \rightarrow +\infty$.

2 a) Za $k = 1, \dots, n$ je $c_{k,n} = \frac{k^{q-1}}{n^q} \leq \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^q}\right)$, odakle izlazi da $c_{k,n}$ teži ka nuli kad

$n \rightarrow +\infty$ uniformno u odnosu na k . Uzimajući u obzir dokazano tvrđenje pod 1° i primedbu 2 i uočavajući da

$$\frac{\sqrt[p]{1+x} - 1}{\frac{1}{p}x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^{q-1}}{n^q} = \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{q-1}}{n^q - (n-1)^q} \\ &= \frac{1}{p} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^q} = \frac{1}{p q}. \end{aligned}$$

Ovde je primenjena Stolzova teorema. Može se postupiti i na sledeći način (definicija određenog integrala u Riemannovom smislu za $q \geq 1$ i dopunski rezultat za $0 < q < 1$ (videti 2.49)):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^{q-1}}{n^q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{q-1} \frac{1}{n} = \int_0^1 t^{q-1} dt = \frac{1}{q}.$$

β) Kako je

$$\left| \frac{2k-1}{n^2} a \right| \leq \frac{2n-1}{n^2} |a| \quad (k = 1, \dots, n),$$

istim rasuđivanjem kao napred dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n^2} a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n^2} n^2 = a.$$

γ) Kao u prethodnom slučaju, imamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \log a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \log a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \log a.$$

δ) Rasuđujući kao u prethodnim slučajevima, dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

2.75. Neka su a i b ($a > b$) dva pozitivna broja. Nizove (a_n) i (b_n) definisaćemo sa

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_1 = a, \quad b_1 = b.$$

Dokazati da ovi nizovi konvergiraju ka istoj granici.

Dokaz. Dokažimo najpre da je

$$(1) \quad a_1 > a_2 > \dots > a_n > b_n > \dots > b_2 > b_1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ove nejednakosti su očigledno tačne za $n = 1$. Pretpostavimo da one važe za neki prirodan broj n . Da bismo dokazali njihovo važenje za prirodan broj $n + 1$, dovoljno je ustanoviti da je

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

Sve ove nejednakosti, međutim, izlaze iz pretpostavke $a_n > b_n > 0$ i iz činjenice da su a_{n+1} i b_{n+1} redom aritmetička i geometrijska sredina pozitivnih brojeva a_n i b_n . Tvrdjenje (1) je tako dokazano matematičkom indukcijom.

Iz (1) izlazi da su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograničeni, tako da $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ postoje i imaju konačne vrednosti, koje ćemo redom označiti sa A i B . Puštajući da $n \rightarrow +\infty$ u jednakosti

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dobijamo

$$A = \frac{A + B}{2}, \quad \text{tj. } A = B.$$

Primedba. Zajednički limes o kome je ovde reč naziva se aritmetičko-geometrijska sredina brojeva a i b . (Pojam i termin potiču od Gaussa.) Ova sredina može se eksplicitno izraziti kao funkcija od a i b uz pomoć eliptičkih integrala. O ovoj sredini videti:

D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Sredine*, Matematička biblioteka, sv. 40, Beograd 1969, str. 51–52.

2.76. Brojni nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vezani su pomoću jednakosti

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Ako je $a_1 > b_1 > 0$, dokazati da je

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > 0 \quad (n \geq 1).$$

Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

2.77. Brojni nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definisani su sa

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},$$

pri čemu su njihovi prvi članovi a_1 i b_1 dati.

Ako je $a_1 > b_1 > 0$, dokazati da je

- (2) $a_n > b_n > 0$,
 (3) $a_{n+1} < a_n, \quad b_{n+1} > b_n$,
 (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}$

Dokaz. Dokazaćemo samo jednakost (4). Prema (3), niz (a_n) opada, a prema (2) je ograničen. Stoga je niz (a_n) konvergentan.

Na osnovu (3), niz (b_n) raste. Kako je, prema (2), $a_1 > a_n > b_n$, niz (b_n) je ograničen, pa je i konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n > 0$.

Ako stavimo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_2$, iz (1) dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right), \quad \text{tj.} \quad l_1 = \frac{1}{2} (l_1 + l_2)$$

odakle je

$$l_1 = l_2 = l, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l > 0.$$

Slično dobijamo ako ovaj postupak primenimo na jednakost kojom je definisan niz (b_n) . Sada ćemo odrediti l . Iz (1) izlazi

$$a_{n+1} b_{n+1} = a_n b_n,$$

odakle je

$$a_k b_k = a_1 b_1.$$

Kako je

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = l^2 \quad \text{i} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k b_k) = a_1 b_1,$$

dobijamo $l = \sqrt{a_1 b_1}$.

Primedba. Nizovi formirani pomoću formula (1) nazivaju se aritmetičko-harmonijske ili harmo-nijsko-aritmetičke sredine. O ovome videti:

D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Sredine*, Matematička biblioteka, sv. 40, Beograd 1969, str. 52–55.

2.78. Dati su nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitivnih brojeva, definisani sa

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 2.$$

Dokazati da su članovi niza $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gde je $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, naizmenično veći i manji od $\sqrt{2}$, i da je

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} |c_n - \sqrt{2}|.$$

Naći $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

Rešenje. Iz datih relacija sleduje

$$(1) \quad c_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}.$$

Kako je $a_n > 0$ i $b_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), zaključujemo da je i $c_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Na osnovu (1), dobijamo

$$(2) \quad \begin{aligned} c_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{c_n + 2}{c_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)c_n + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{c_n + 1} \\ &= -\frac{\sqrt{2} - 1}{c_n + 1} (c_n - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Kako je $c_n > 0$, iz (2) izlazi

$$c_n > \sqrt[3]{2} \Rightarrow c_{n+1} < \sqrt[3]{2}, \quad c_n < \sqrt[3]{2} \Rightarrow c_{n+1} > \sqrt[3]{2}.$$

Kako je $c_1 = \frac{3}{2} > \sqrt[3]{2}$, zaključujemo da je

$$c_{2n} < \sqrt[3]{2}, \quad c_{2n-1} > \sqrt[3]{2} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Iz $c_n > 0$ ($n \in \mathbf{N}$) sleduje

$$0 < \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{c_n + 1} < \sqrt[3]{2} - 1 < \frac{1}{2}.$$

Na osnovu ovoga, iz (2) izlazi

$$|c_{n+1} - \sqrt[3]{2}| < \frac{1}{2} |c_n - \sqrt[3]{2}|,$$

i dalje

$$|c_n - \sqrt[3]{2}| < \frac{1}{2^{n-1}} |c_1 - \sqrt[3]{2}| \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Oдавде,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n - \sqrt[3]{2}| = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \sqrt[3]{2}.$$

2.79. Niz nenegativnih brojeva a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), definisan je sa

$$a_n^2 = 3a_{n-1} - 2 \quad (n \geq 1).$$

Ako je $1 \leq a_0 \leq 2$, ispitati da li je $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergentan niz, i ako je odgovor potvrđan, odrediti njegovu graničnu vrednost.

2.80. Dat je niz

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt[t]{t + a_n} \quad (t \geq 0 \text{ fiksno; } n = 1, 2, \dots),$$

tj. niz

$$0, \quad \sqrt[t]{t}, \quad \sqrt[t]{t + \sqrt[t]{t}}, \quad \sqrt[t]{t + \sqrt[t]{t + \sqrt[t]{t}}}, \dots \quad (t > 0).$$

Dokazati da je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4t}) & (t > 0), \\ &= 0 & (t = 0), \end{aligned}$$

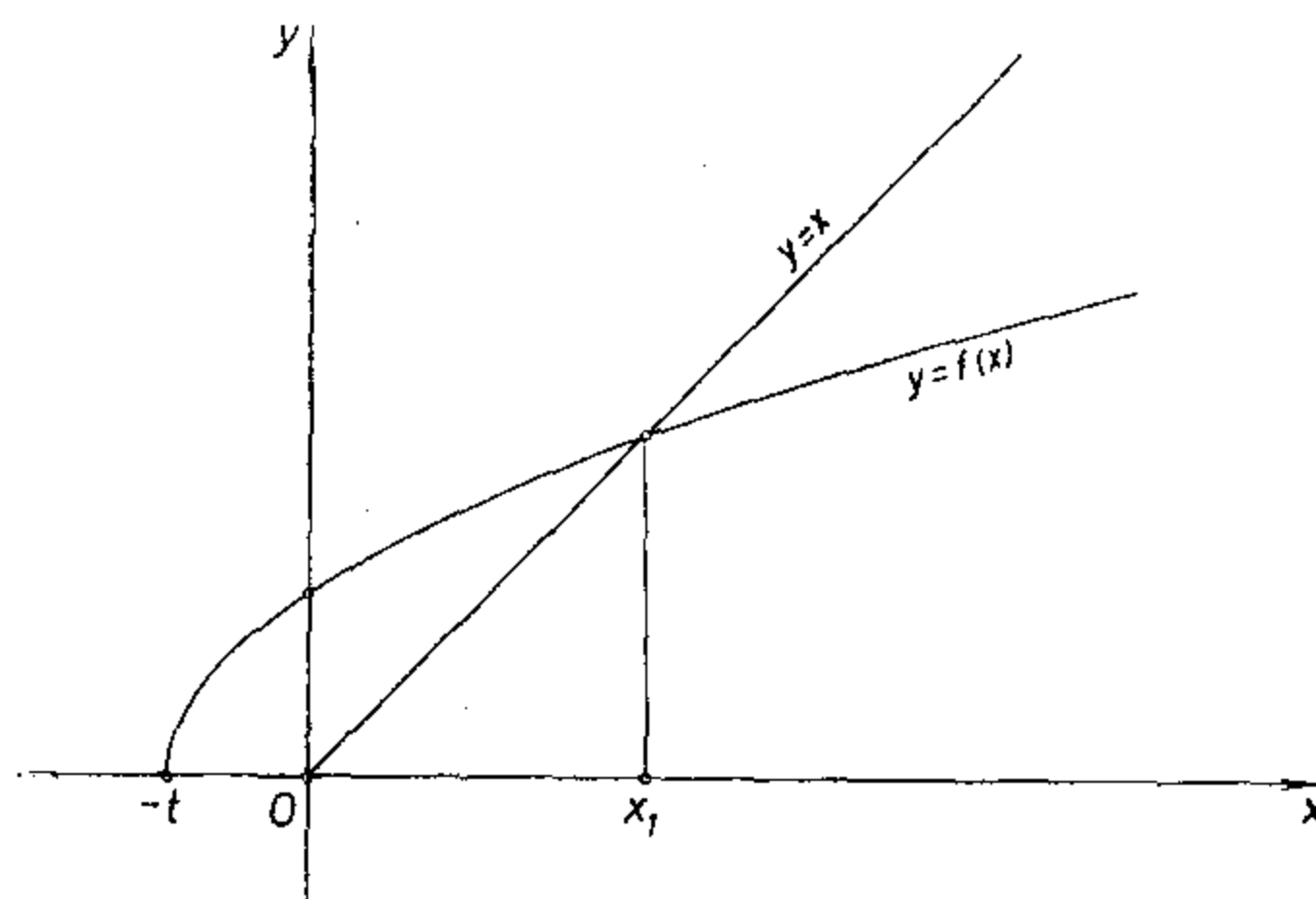
što znači da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ prekidna funkcija od t u tački $t = 0$.

Primedba. Može se rešiti i sledeći opštiji problem: U zavisnosti od nenegativnih vrednosti za t i mogućih realnih vrednosti za a , ispitati monotoniju, konvergenciju i graničnu vrednost niza (a_n) datog sa

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \sqrt[t]{t + a_n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Rešenje. Neka je, najpre, $t > 0$. Funkcija $x \rightarrow f(x) = \sqrt[t]{t + x}$ ima na slici prikazani grafik. Ona je definisana za $x \geq -t$, i $f(x) > x$, $f(x) = x$ ili $f(x) < x$, prema tome da li je $-t \leq x < x_1$, $x = x_1$ ili $x > x_1$. Za a dolaze u obzir vrednosti iz intervala $[-t, +\infty)$. Indukcijom se bez teškoća može ustanoviti da, ako je $a \in [-t, x_1)$, tada $a_n \uparrow$ ($n \in \mathbf{N}$) i $a_n < x_1$.

($n \in \mathbb{N}$). Odatle izlazi konvergencija niza (a_n) u tom slučaju, kao i jednakost $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_1$. Na isti način se ustanovljava da, ako je $a > x_1$, niz (a_n) strogo opadajući teži ka x_1 . Najzad, u slučaju kada je $a = x_1$, niz, očigledno, ima konstantnu vrednost x_1 .



Ako je $t = 0$, sličnim rasuđivanjem ustanovljava se da niz (a_n) konstantno ima vrednost 0, strogo rastući konvergira ka 1, konstantno uzima vrednost 1, ili strogo opadajući konvergira ka broju 1, prema tome da li je $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ ili $a > 1$.

Slična kompletnija analiza ponašanja, pod opštijim pretpostavkama, može se izvršiti za još nekoliko rekurentno definisanih nizova koji se navode u problemima iz ovog odeljka.

2.81. Dat je niz

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{x}{2 + a_n} \quad (x \geq 0 \text{ fiksno}; n = 1, 2, \dots),$$

tj.

$$0, \quad \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2 + \frac{x}{2}}, \quad \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2}}}, \dots$$

Dokazati da

$$a_n \rightarrow \sqrt{x+1} - 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Primedba. Ovaj niz je koristan za približno izračunavanje $\sqrt[k]{k}$ ($k > 1$). Ako se gore stavi $x = k - 1$, dobija se $a_n \rightarrow \sqrt[k]{k} - 1$.

2.82. Niz a_n ($n = 1, 2, \dots$) ispunjava uslove: $2 < a_1 < 3$, $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$. Dokazati da je ovaj niz konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

2.83. Niz (x_n) definisan je rekurzivno sa

$$(1) \quad x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2} \quad (x_0, x_1 \text{ fiksni realni brojevi}).$$

Odrediti $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Rešenje. Predstavimo (1) u obliku

$$(2) \quad x_n - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{n}.$$

Odavde izlazi

$$x_k - x_{k-1} = (-1)^k \frac{x_0 - x_1}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Posle sumiranja nalazi se

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (x_0 - x_1)}{k!}, \quad \text{tj. } x_n = x_0 + (x_0 - x_1) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Odavde,

$$x_n \rightarrow x_0 + (x_0 - x_1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Kako je $\frac{1}{e} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$, dolazi se do

$$x_n \rightarrow x_1 + (x_0 - x_1) e^{-1} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

2.84. Za $k > 1$ dati su nizovi (a_n) i (b_n) , gde je

$$\begin{aligned} a_n &= (k(k-1) + a_{n-1})^{1/2}, & a_1 &= (k(k-1))^{1/2}, \\ b_n &= (k b_{n-1})^{1/2}, & b_1 &= k^{1/2}. \end{aligned}$$

Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = k$.

Rešenje. Kako je $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$ i $a_2 > a_1$, matematičkom indukcijom zaključujemo da je niz a_n rastući. Dokažimo da je $a_n < k$. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno, jer je $(k(k-1))^{1/2} < k$. Neka je $a_{n-1} < k$; tada je $a_n = (k(k-1) + a_{n-1})^{1/2} < (k(k-1) + k)^{1/2} = k$.

Prema tome, iz pretpostavke da je tvrđenje tačno za $n-1$ sleduje da je ono tačno za n . Dakle, $a_n < k$ za svaki prirodan broj n . Kako je niz (a_n) ograničen i rastući, on je konvergentan. Stavimo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = s$. Tada, na osnovu $a_n^2 = k(k-1) + a_{n-1}$ imamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = k(k-1) + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n-1} \Rightarrow s^2 = k(k-1) + s \Rightarrow s = k,$$

jer je $s > 0$, pa rešenje $s = 1 - k < 0$ ne dolazi u obzir.

Dakle, zaista je $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = k$.

Za niz (b_n) može se na sličan način zaključiti da je rastući i ograničen. Ako stavimo $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = t$, iz $b_n^2 = k b_{n-1}$ dobijamo $t^2 = kt \Rightarrow t = k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = k$, čime je tvrđenje dokazano.

2.85. Dokazati da niz

$$x_0, \quad x_1 = \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}, \dots, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}, \dots \quad (0 < x_0 < b; \quad a > 0)$$

strogo raste i da je ograničen. Odrediti $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Rešenje. Ispitajmo da li je

$$(1) \quad x_0 < x_1, \quad \text{tj. } x_0 < \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}.$$