1. PREGLED TEORIJE NIZOVA I REDOVA

1.1. NIZOVI

1.1.1. DEFINICIJE

1.1.1.1. Svaka funkcija $\mathbf{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ naziva se *nizom kompleksnih brojeva* ili kraće, *kompleksnim nizom.* Ako je, specijalno, $\mathbf{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, tada se $\mathbf{a}$ naziva *nizom realnik brojeva* ili *realnim nizom.* Kompleksni i realni nizovi zovu se *brojni* ili *numerički nizovi.*

U teoriji brojnih nizova umesto $\mathbf{a}(n)$ često se piše a_n. Uređeni par (n, a_n) naziva se *n-tim članom niza* $\mathbf{a}$. Često se, radi kraćeg izražavanja, kaže da je a_n n-ti član niza $\mathbf{a}$. Broj n naziva se tada *indeksom* člana a_n.

Sam niz $\mathbf{a}$ obično se označava sa $a_n \ (n = 1, 2, \ldots)$.

Upotrebljavaju se takođe sledeće oznake:

$$a_n \ (n \in \mathbf{N}); \quad (a_n)_{n \in \mathbf{N}}; \quad (a_n); \quad (a_1, a_2, \ldots); \quad a_n.$$

Skup $\mathbf{N}$ je *domen* ili *skup indeksa* niza (a_n) (videti 0.8).

Skup $\mathbf{a}(\mathbf{N})$ naziva se *skupom vrednosti* ili *antidomenom* niza (a_n) (videti 0.8).

U prethodnom izlaganju skup $\mathbf{N}$ može se zameniti skupom $\mathbf{N_m} = \{m, m + 1, \ldots\}$, gde je $m \in \mathbf{N}_0$. Kako se ovaj opštiji slučaj u pogledu pojmova i rezultata ne razlikuje bitno od slučaja kada je domen niza $\mathbf{N}$ (stav 1.2.2.1), u ovom pregledu teorije nizova ograničićemo se na slučaj niza sa domenom $\mathbf{N}$.

1.1.1.2. Po definiciji, niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je *ograničen* ili *neograničen* zajedno sa svojim skupom vrednosti.

Za realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ brojevi $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n$ i $\inf\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n$, koji se redom nazivaju *supremum* i *infimum niza,* definisani su sa

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n \overset{\text{def}}{=} \sup \mathbf{a}(\mathbf{N}), \quad \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n \overset{\text{def}}{=} \inf \mathbf{a}(\mathbf{N}).$$

Ako je $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n < +\infty$, kaže se da je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *s gornje strane ograničen*; u suprotnom slučaju, isti niz je *s gornje strane neograničen.* Pojmovi *»s donje strane ograničen niz« i »s donje strane neograničen niz«* analogno se definišu. Za niz koji je i s donje strane ograničen kaže se kratko da je *ograničen;* ako niz nije ograničen, kaže se da je *neograničen.*

1.1.1.3. Monotoni nizovi. Ako je $a_n \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, kaže se da je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *(monotono) rastući.* Ako je $a_n \geq a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je *(monotono) opadajući.* Prethodnim nejednakostima u kojima su redom znaci $\leq$ i $\geq$ zamenjeni sa $<$ i $>$ redom se definišu *strogo* (ili *striktno*) *rastući* i *strogo* (ili *striktno*) *opadajući niz*. U sva četiri slučaja kaže se da je niz *monoton;* u poslednja dva kaže se i da je on *strogo* ili *striktno monoton*. (U drukčijoj terminologiji, umesto rastući, opadajući, strogo rastući i strogo opadajući niz kaže se redom: neopadajući, nerastući, rastući i opadajući niz. U daljem izlaganju koristićemo uvek prvi način izražavanja.)

Realan niz može monotono rasti, monotono opadati, itd. i za $n \geq m$, gde je $m \in \mathbf{N}$ fiksirano, ili *za dovoljno veliko* n, ukoliko postoji $m \in \mathbf{N}$ (koje se ne precizira) takvo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za $n \geq m$, itd.

Upotrebljavaju se takođe sledeće oznake:

$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \nearrow$ rastući niz;

$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \searrow$ opadajući niz;

$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \uparrow$ strogo rastući niz;

$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \downarrow$ strogo opadajući niz.

1.1.1.4. Podniz. Za niz b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ kaže se da je *podniz niza* $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ako je

$$b_n = a_{p_n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde je p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ strogo rastući niz prirodnih brojeva.

1.1.1.5. Konvergencija. Granična vrednost. Kaže se da je niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *konvergentan* ili da *konvergira* (*teži*) *ka broju* a ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $n_0 \in \mathbf{N}$ da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_0;$$

drugim rečima, ako svaka okolina* tačke a sadrži sve članove niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ čiji su indeksi dovoljno veliki. U tom slučaju, broj a zove se *granična vrednost* ili *limes* niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i piše se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a, \quad \text{ili} \quad a_n \to a \quad (n \to +\infty).$$

Često se za niz kaže samo da *konvergira* ili da je *konvergentan*, bez pominjanja broja ka kome konvergira.

Niz koji konvergira ka nuli zove se *nula-niz*.

Za niz koji ne konvergira kaže se da *divergira* ili da je *divergentan*.

1.1.1.5.1. Za realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ kaže se da teži ka $+\infty$ (*ka pozitivnoj beskonačnosti*) i piše

$$a_n \to +\infty \ (n \to +\infty), \text{ ili } \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty,$$

ako za svako $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $a_n > M$ za svako $n \geq n_0$. Analogno se definiše značenje iskaza »niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *teži ka* $-\infty$ (*ka negativnoj beskonačnosti*)«; odgovarajuća oznaka je

$$a_n \to -\infty \ (n \to +\infty), \text{ ili } \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$$

Za realne nizove koji teže ka $+\infty$ ili ka $-\infty$ kaže se takođe da *stvarno divergiraju*. Realni nizovi koji nisu ni konvergentni ni stvarno divergentni nazivaju se *oscilatornim nizovima*. S obzirom na druge varijante prethodnih oznaka, ako $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, odnosno $a_n \to -\infty$ $(n \to +\infty)$, kaže se i da je $+\infty$, odnosno $-\infty$, *limes* niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

---

* *Okolinom* tačke (broja) a u sistemu kompleksnih brojeva naziva se (u jednoj varijanti tog pojma) svaki disk (otvoreni krug) sa centrom u toj tački i poluprečnika $\varepsilon > 0$, a u sistemu realnih brojeva svaki interval oblika $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

1.1.1.5.2. Kaže se da kompleksan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *teži ka* ∞ (*ka beskonačnosti*) i piše

$$a_n \to \infty \ (n \to +\infty), \text{ ili } \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty,$$

ako $|a_n| \to +\infty \quad (n \to +\infty)$.

1.1.1.6. Tačka nagomilavanja. Za kompleksan broj a kaže se da je tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $n_0 \in \mathbf{N}$ postoji prirodan broj $n \geq n_0$ takav da je $|a_n - a| < \varepsilon$; drugim rečima, ako svaka okolina tačke a sadrži članove niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sa proizvoljno velikim indeksima.

1.1.1.7. Donji i gornji limes. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ realan niz i S skup svih njegovih tačaka nagomilavanja (S može biti i prazan skup). *Gornjim limesom* (sinonimi: *limes superior, gornja tačka nagomilavanja*) niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ naziva se element L skupa $\mathbf{R}_\infty$ koji se određuje na sledeći način:

$$L = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je niz } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ neograničen s gornje strane;} \\ -\infty, & \text{ako je niz } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ s gornje strane ograničen i skup } S \text{ je prazan (tj. ako je } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty); \\ \sup S, & \text{ako je niz } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ s gornje strane ograničen i skup } S \text{ nije prazan.} \end{cases}$$

Analogno se definiše *donji limes* (*limes inferior, donja tačka nagomilavanja*) niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Gornji limes niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ označava se jednim od sledeća dva simbola

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \quad \text{ili} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n,$$

a donji limes istog niza jednim od simbola

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \quad \text{ili} \quad \liminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Prema odgovarajućim tvrđenjima u 1.1.2, gornji i donji limes jednoznačno su određeni (kao elementi skupa $\mathbf{R}_\infty$) za svaki realan niz i svaki od njih je tačka nagomilavanja niza u slučaju kad je konačan. Stoga, ako je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n \in \mathbf{R}$, imamo $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n = \max S$, a ako je $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n \in \mathbf{R}$, tada je $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n = \min S$.

Često se u slučaju kad je realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ neograničen s gornje, odnosno s donje strane, kaže da je simbol $+\infty$, odnosno $-\infty$, njegova tačka nagomilavanja. Ako se ova konvencija usvoji, tada se, uz na prirodan način na skup $\mathbf{R}_\infty$ proširen poredak skupa $\mathbf{R}$ (videti 0.10), gornji i donji limes mogu bez ograničenja definisati na sledeći način:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup S, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf S,$$

a takođe i ovako:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \max S, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \min S.$$

1.1.1.8. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, piše se $a_n \sim b_n$ $(n\to+\infty)$ i kaže da se niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *asimptotski ponaša* kao niz $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (ili da je prvi niz *asimptotski jednak* drugom).

Neka su (a_n) i (b_n) realni nizovi i neka je $b_n>0$ $(n\in\mathbf{N})$. Tada se piše:

$a_n=O(b_n)$ ako je niz $\frac{a_n}{b_n}$ ograničen; $a_n=o(b_n)$ ako niz $\frac{a_n}{b_n}$ teži ka 0.

1.1.2. TEOREME O KONVERGENCIJI I O TAČKAMA NAGOMILAVANJA NIZOVA

Na početku navodimo jedan stav iz osnova matematičke analize, koji posebno igra fundamentalnu ulogu u teoriji brojnih nizova.

1.1.2.0. Svaki neprazan i sa gornje strane ograničen skup realnih brojeva ima supremum, a svaki neprazan i sa donje strane ograničen skup realnih brojeva ima infimum.

Navedeni stav ne odnosi se direktno na nizove, ali se bitno koristi u dokazu nekih najvažnijih od sledećih teorema o brojnim nizovima. Sve one od tih teorema u čijoj formulaciji ili u vezi s kojima nije izričito rečeno da je reč o realnim nizovima odnose se na opšti slučaj kompleksnog niza.

1.1.2.1. Ako se doda ili oduzme konačan broj članova nizu, ili se izmene vrednosti konačnog broja njegovih članova,[1] ne menjaju se: njegova ograničenost (odnosno neograničenost), njegova konvergencija, granična vrednost i tačke nagomilavanja.

1.1.2.2. Granična vrednost niza je i njegova tačka nagomilavanja. Obrnuto ne važi. Niz može imati samo jednu graničnu vrednost.

1.1.2.3. Ako niz teži ka a, tada i svaki njegov podniz teži ka a.

1.1.2.4. Tačka nagomilavanja podniza nekog niza je tačka nagomilavanja tog niza.

1.1.2.5. Ako je a tačka nagomilavanja nekog niza, postoji podniz toga niza koji konvergira ka a.

Sledeće dve teoreme odnose se na realne nizove.

1.1.2.6. Ako je $a_n\le b_n\le c_n$ za dovoljno veliko n i ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=b$, tada je niz b_n $(n=1,2,\ldots)$ konvergentan i $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$. Pri tome b može biti proizvoljan element skupa $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.7. 1° Ako je $a_n\le b_n$ za dovoljno veliko n i ako postoje $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$.

2° Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n<\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, tada je $a_n<b_n$ za dovoljno veliko n.

[1] Čitalac će lako dati precizno tumačenje ovim formulacijama.

1.1.2.8. Teorema o konvergenciji monotonih nizova. Svaki monoton i ograničen realni niz je konvergentan.

Pri tome, ako je niz (a_n) opadajući i (s gornje strane) ograničen, važi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$, a ako je opadajući i (s gornje strane) ograničen, imamo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\limits_{n\geq 1} a_n$.

1.1.2.9. Dedekindova teorema. Neka su a_n i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ realni nizovi sa osobinama: $a_n \nearrow, b_n \searrow$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Tada su oba ova niza konvergentna i njihova zajednička granična vrednost c zadovoljava dvostruku nejednakost $a_n \leq c \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. U slučaju kad je $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$ $(n = 1, 2, \ldots)$ prethodna dvostruka nejednakost može se zameniti preciznijom: $a_n < c < b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

1.1.2.10. Bolzano-Weierstrassova teorema. Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

1.1.2.11. Da bi brojni niz konvergirao, potrebno je i dovoljno da bude ograničen i da ima samo jednu tačku nagomilavanja.

1.1.2.12. Cauchyev kriterijum konvergencije. Da bi niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergirao, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|a_p - a_q| < \varepsilon \quad \text{za} \quad p \geq q \geq n_0.$$

1.1.2.13. Ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan, tada je konvergentan i niz $|a_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i važi $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right|$.

Egzistencija i konačnost limesa na levoj strani ne povlači egzistenciju limesa na desnoj strani.

1.1.2.13.1. Uz konvenciju $|\pm\infty| = +\infty$, za realne nizove važe oba tvrđenja prethodne teoreme u kojoj je konvergencija (tj. egzistencija konačnog limesa) zamenjena egzistencijom limesa u $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.14. Ako su nizovi a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergentni, tada su konvergentni i nizovi $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i tada je

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n, \\ (1) \qquad &\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n, \\ &\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} b_n. \end{aligned}$$

Ako je još $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, tada je i niz a_n/b_n (n dovoljno veliko) konvergentan i važi jednakost

$$(2) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.$$

Egzistencija i konačnost bilo kog (posebno) od limesa na levim stranama jednakosti (1) i (2) ne povlači egzistenciju ni $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ni $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

1.1.2.14.1. Uz isključenje slučajeva kad se na desnoj strani javlja jedan od izraza

$$+\infty-\infty, \quad -\infty+\infty, \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\cdot 0, \quad \frac{a}{0}\ (a\in \mathbf{R}_\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

sva tvrđenja teoreme 1.1.2.14, u kojoj je konvergencija zamenjena egzistencijom limesa u $\mathbf{R}_\infty$, važe i u $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.15. Ako je gornji limes realnog niza konačan, on je najveća tačka nagomilavanja (tj. maksimum skupa tačaka nagomilavanja) tog niza. Analogno tvrđenje važi za donji limes.

1.1.2.16. Da bi realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ imao limes u $\mathbf{R}_\infty$ (tj. konvergirao ili težio ka pozitivnoj ili negativnoj beskonačnosti), potrebno je i dovoljno da bude

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

1.1.2.17. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ realan niz. Ako je $a_n\le A$ za dovoljno veliko n, tada je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n\le A$; ako je $a_n\ge a$ za proizvoljno velike vrednosti n, tada je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n\ge a$; ako je $a_n\le A$ za proizvoljno velike vrednosti n, tada je $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n\le A$; ako je $a_n\ge a$ za dovoljno veliko n, tada je $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n\ge a$.

1.1.2.18. Da bi realan broj L bio gornji limes realnog niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon>0$ nejednakost $a_n<L+\varepsilon$ bude zadovoljena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n>L-\varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n. Da bi realan broj l bio donji limes istog niza, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon>0$ nejednakost $a_n>l-\varepsilon$ bude zadovoljena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n<l+\varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n.

1.1.2.19. Neka su a_n i b_n $(n\in\mathbf{N})$ realni nizovi. Ako je za n dovoljno veliko $a_n\le b_n$, tada je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \quad \text{i} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

(Tvrđenje 1° teoreme 1.1.2.7 je specijalan slučaj ove teoreme.)

1.1.2.20. 1° Neka su $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dva realna niza. Uz isključenje slučajeva kad se javljaju izrazi koji nemaju smisla, važe sledeće nejednakosti:

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

2° Ako je još $a_n\ge 0$, $b_n\ge 0$ za dovoljno veliko n, tada, uz isto ograničenje kao napred, važe nejednakosti

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

1.1.2.21. Za svaki realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je

$$\varliminf_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n,\quad \varlimsup_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Ako je $a_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n},\quad \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n},$$

gde se, pored već usvojene konvencije $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, uzima da je $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

1.1.2.22. Stolzova teorema. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dva realna niza. Ako $b_n \to +\infty\ (n \to +\infty)$ i $b_n \uparrow$ za n dovoljno veliko, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \le \varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Posledica 1. Specijalno, pod istim pretpostavkama, iz egzistencije limesa

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

(u $\mathbf{R}_\infty$) sleduje egzistencija limesa $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ kao i jednakost

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Egzistencija leve strane poslednje jednakosti ne povlači egzistenciju desne strane iste jednakosti.

Stolzova teorema ima još sledeće važne posledice:

1.1.2.22.1. Cauchyeva teorema. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$

Posledica 1 Stolzove teoreme i Cauchyeva teorema važe i kada je a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ kompleksan niz.

1.1.2.22.2. Ako je $a_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = a$.

1.1.2.22.3. Ako je $a_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \varliminf_{n\to+\infty} a_n^{1/n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} a_n^{1/n} \le \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Specijalno, pod istom pretpostavkom, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ izlazi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = a$.

1.1.2.23. Nekoliko partikularnih rezultata

1.1.2.23.1. $\alpha_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \uparrow, \quad \beta_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow \quad (n = 1, 2, \ldots);$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = e \in (2, 3);$$

$$\alpha_n < e < \beta_n, \quad 0 < e - \alpha_n < \beta_n - \alpha_n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Broj e, zajednički limes nizova α_n, β_n i $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, je transcendentan i ima decimalni razvoj $e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ldots$

1.1.2.23.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n\right) = \gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ldots$

Broj γ zove se Eulerova konstanta.

Primedba. Još nije ustanovljeno da li je γ racionalan ili iracionalan broj.

1.1.2.23.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0 \quad (|a| < 1).$

1.1.2.23.4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1).$

1.1.2.23.5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbf{C}).$

1.1.2.23.6. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \quad (a > 0).$

1.1.2.23.7. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1.$

1.1.2.23.8. Stirlingova formula.[1] Navešćemo dva oblika ove formule.

Precizniji oblik:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1;\ n \in \mathbf{N}).$$

Manje precizni oblik:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad (n \to +\infty).$$

[1] Detaljnije o Stirlingovoj formuli videti:
D. S. Mitrinović, saradnik P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti*. Beograd 1970, str. 175–179.

1.1.3. FUNKCIONALNI NIZOVI

1.1.3.1. Pojam *funkcionalnog niza* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, gde su $x \mapsto f_n(x)$ realne funkcije realne nezavisno promenljive sa istim domenom, definiše se na sličan način kao pojam brojnog niza.

Realne funkcije realne promenljive mogle bi se, u prethodnom tekstu i u nekim od sledećih rezultata, zameniti kompleksnim funkcijama kompleksne promenljive, ali izlaganje koje sleduje pretpostavlja da je reč o nizovima realnih funkcija realne promenljive.

1.1.3.2. Ako je konvergentan brojni niz koji se dobija od niza $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ stavljajući $x = x_0$, kaže se da *funkcionalni niz* $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *konvergira u tački* $x = x_0$.

Skup svih tačaka u kojima niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira zove se ***skup konvergencije*** ovog funkcionalnog niza.

Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ za svako $x \in E\,(\subset \mathbf{R})$, funkcija $x \mapsto f(x)$ naziva se *graničnom funkcijom niza* $(f_n(\ ))_{n\in\mathbf{N}}$ *na skupu* E.

1.1.3.3. Neka je $E\,(\subset \mathbf{R})$ skup na kome su sve funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definisane. Ako postoji nenegativan realan broj M takav da je $|f_n(x)| \leq M$ za svako $x \in E$ i za svako $n \in \mathbf{N}$, kaže se da je niz $f_1, f_2, \ldots$ *uniformno ograničen na* E.

1.1.3.4. Neka su sve funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definisane na skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$ i svako $x \in E$, kaže se da *niz* $f_n(x)$ *uniformno konvergira ka funkciji* $x \mapsto f(x)$ *na skupu* E.

Ako je skup E interval, onda se u 1.1.3.2, 1.1.3.3 i 1.1.3.4 na svim mestima reči »na E« mogu zameniti rečima »u (intervalu) E«.

1.1.3.4.1. Neka je $G_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ za dati skup $E\,(\subset \mathbf{R})$ i neka je

$$\Delta_n = \sup_{x\in E} G_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da bi niz $f_n(x)$ na E uniformno konvergirao ka $f(x)$, potrebno je i dovoljno da bude $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$.

Ako $x_n \in E\,(n = 1, 2, \ldots)$ i $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, G_n(x_n) > 0$, tada $f_n(x)$ ne konvergira uniformno ka $f(x)$ na E.

1.1.3.5. Cauchyev kriterijum za uniformnu konvergenciju. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ uniformno konvergira na skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

za svako $p \geq q \geq n_0$ i za svako $x \in E$.

1.1.3.6. Ako su sve funkcije $x \mapsto f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ neprekidne na skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$ i niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ na E uniformno konvergira ka $f(x)$, tada je i funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na skupu E.

1.1.3.7. Neka je $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ niz realnih funkcija koje su u Riemannovom smislu integrabilne u intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Ako ovaj niz u

$[a, b]$ uniformno konvergira ka funkciji $x \mapsto f(x)$, tada je funkcija $x \mapsto f(x)$ u $[a, b]$ u Riemannovom smislu integrabilna i važi jednakost

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

1.1.3.7.1. Teorema Arzelà. Neka je svaka od funkcija $x \mapsto f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ u Riemannovom smislu integrabilna u intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Ako je ovaj niz u $[a, b]$ uniformno ograničen i konvergira ka funkciji $x \to f(x)$ koja je u $[a, b]$ integrabilna u Riemannovom smislu, tada važi jednakost (3).

1.1.3.8. Neka su sve funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definisane u intervalu (a, b) $(a < b)$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° niz $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergira za neko $x_0 \in (a, b)$;

2° sve funkcije $x \to f_n'(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ imaju konačne vrednosti za svako $x \in (a, b)$;

3° niz $f_n'(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b).

Tada:

a) niz $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b);

b) granična funkcija $x \mapsto f(x)$ niza $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ima izvod u (a, b) i

c) $f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$ za svako $x \in (a, b)$.

Primedba 1. Prethodna teorema često se navodi u (za dokaz) jednostavnijem obliku u kome se pretpostavka 2° zamenjuje pretpostavkom da su svi izvodi $x \to f_n'(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ neprekidni u intervalu (a, b).

Primedba 2. Uz zamenu na svim mestima E $(\subset \mathbf{R})$ sa E $(\subset \mathbf{C})$, definicije 1.1.3.2, 1.1.3.3 i 1.1.3.4, kao i teoreme 1.1.3.4.1, 1.1.3.5 i 1.1.3.6, važe i za nizove kompleksnih funkcija kompleksne promenljive. Teorema 1.1.3.7 takođe ima svoj analogon za slučaj kompleksnih funkcionalnih nizova.

1.2. REDOVI

1.2.1. BROJNI REDOVI

1.2.1.1. Neka je

(1) $$a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

niz kompleksnih brojeva. Simbolička oznaka formalnog beskonačnog sumiranja članova ovoga niza

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \text{ili} \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots,$$

naziva se *brojnim* (*numeričkim*) *redom* ili, kraće, *redom*. Po definiciji, *n*-ti član niza (1) je ujedno i *n-ti član* reda (2).

Opštije, brojni red može imati oblik

(2') $$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \quad \text{ili} \quad a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots \quad (n_0 \in \mathbf{N}_0).$$

Ponekad se terminu »brojni red« pridaje uže značenje brojnog reda čiji su svi članovi realni brojevi.

Zbir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

naziva se *n-tom parcijalnom sumom* reda (2).

1.2.1.2. Konvergencija brojnog reda. Ako niz parcijalnih suma S_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ brojnog reda (2) konvergira ka (konačnoj) granici S, kaže se da red (2) *konvergira* ili da je *konvergentan*. Broj S u tom slučaju naziva se *sumom* (*zbirom*) reda (2) i označava jednim od simbola (2), tako da se može pisati

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S, \quad \text{ili} \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = S.$$

Ako brojni red ne konvergira, kaže se da *divergira* ili da je *divergentan*.

Ako red (2) konvergira, broj

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

naziva se njegovim *n-tim ostatkom*.