VIII Теореме о универзалним коефицијентима и Кинетова формула

Тензорски производ и Tor функтор

деф. Нека су A и B Абелове групе и $F(A,B)$ слободна Абелова група генерисана елементима из $A\times B$, тј.

$$F(A,B) := F[A\times B] = \{\alpha_1(a_1,b_1)+\dots+\alpha_k(a_k,b_k) \mid k\in\mathbb{N},\ \alpha_i\in\mathbb{Z}\}.$$

Нека је $R(A,B)$ подгрупа од $F(A,B)$ генерисана елементима облика:

$$(a, b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2)$$

и

$$(a_1+a_2, b)-(a_1,b)-(a_2,b),$$

где $a,a_1,a_2\in A$, $b,b_1,b_2\in B$.

Тензорски производ група A и B дефинишемо као

$$A\otimes B \overset{\text{def}}{=} F(A,B)/R(A,B)$$

класу $[(a,b)]\in A\otimes B$ означавамо са $a\otimes b$.

Главна особина $\otimes$ је тзв. универзално својство

Теорема [универзално својство] За сваку Абелову гр. C и билинеарно пресликавање $\phi: A\times B\to C$ постоји $\tilde{\phi}: A\otimes B\to C$ тд. следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\phi"'] & A\otimes B \arrow[d, dashed, "\tilde{\phi}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & C \end{tikzcd}$$

тј. тд. $\tilde{\phi}\circ\pi = \phi$.

(π је природна пројекција $\pi(a,b)=a\otimes b$)

Особине тензорског производа:

(1) $A \otimes B \cong B \otimes A$

(2) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

(3) $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right) \otimes B \cong \bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes B)$, $\quad A \otimes \left(\bigoplus_{j\in J} B_j\right) \cong \bigoplus_{j\in J} (A \otimes B_j)$

(4) $\mathbb{Z} \otimes B \cong B \otimes \mathbb{Z} \cong B$ ($\mathbb{Z}$ је неутрал за $\otimes$)

(5) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\text{НЗД}(m,n)}$ (нпр. $\mathbb{Z}_{12} \otimes \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_3$)

Став Тензорски производ је десно тачан функтор, тј. ако је низ $B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ тачан и A Абелова, онда је и
$$\underbrace{A \otimes B' \xrightarrow{1 \otimes f} A \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} A \otimes B'' \to 0}_{\star}$$
тачан.

Ако је $0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ КТН, у општем случају низ
$$0 \to A \otimes B' \xrightarrow{1 \otimes f} A \otimes B \xrightarrow{1 \otimes g} A \otimes B'' \to 0$$
не мора бити тачан, али низ $(\star)$ се може допунити неким другим групама са леве стране тд. буде тачан.

деф. Нека су A и B Абелове групе. Слободна резолвента групе B је тачан низ $0 \to F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} B \to 0$ где су F_0 и F_1 слободне. Тада имамо тачан низ:
$$0 \to \ker(1 \otimes d) \to A \otimes F_1 \xrightarrow{1 \otimes d} A \otimes F_0 \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} A \otimes B \to 0$$
и дефинишемо Tor функтор групе A и B као:
$$\operatorname{Tor}(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(1 \otimes d).$$
(може се показати да Tor не зависи од избора слободне резолвенте.)

Особине Tor функтора:

(1) $\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(B,A)$

(2) $\mathrm{Tor}\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}(A_i, B)$, $\mathrm{Tor}\left(A, \bigoplus_{j\in J} B_j\right) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}(A, B_j)$

(3) Ако је B слободна, $\mathrm{Tor}(A,B)=0$.
Специјално, $\mathrm{Tor}(A,\mathbb{Z})=0$

(4) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{\text{НЗД}(m,n)}$

Теорема о универзалним коефицијентима

Сингуларни л.к. дефинисали смо као

$$S_n(X) = \{\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_k\sigma_k \mid \sigma_i : \Delta^n \to X \text{ непр.}, k\in\mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Z}\} \cong \bigoplus_{\sigma}\mathbb{Z}$$

Нека је G Абелова група. Тада

$$S_n(X)\otimes G \cong \left(\bigoplus_{\sigma}\mathbb{Z}\right)\otimes G \cong \bigoplus_{\sigma}(\mathbb{Z}\otimes G) \cong \bigoplus_{\sigma} G =$$

$$= \{\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_k\sigma_k \mid \sigma_i : \Delta^n \to X \text{ непр.}, k\in\mathbb{N}, \lambda_i \in G\}$$

деф. За топ. пар (X,A) и Абелову групу G дефинишемо

$$S_*(X,A;G) \overset{\text{def}}{=} S_*(X,A)\otimes G.$$

Ово је ланчасти комплекс са граничним оператором $d\otimes\mathbb{1}$.

$S_*(X,A;G)$ је сингуларни л.к. са коефицијентима у G.

Хомологија пара (X,A) са коеф. у G је

$$H_n(X,A;G) \overset{\text{def}}{=} H_n(S_*(X,A;G)).$$

Специјално, за $A=\emptyset$ имамо хомологију топ. пр. X са коеф. у G: $H_n(X;G) = H_n(X,\emptyset;G)$.

Дакле, хомологија са којом смо до сада радили је управо хомологија са коеф. у $\mathbb{Z}$:

$$H_n(X, A) \cong H_n(X, A; \mathbb{Z}).$$

Теорема [о универзалним коефицијентима] Нека је C_* л.к. слободних Абелових гр. и G Абелова група. Тада постоји природан кгн.

$$0 \to H_n(C_*) \otimes G \to H_n(C_* \otimes G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \to 0$$

који се цепа, тј.

$$H_n(C_* \otimes G) \cong \big(H_n(C_*) \otimes G\big) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G).$$

То да је кгн. природан значи да за свако ланчасто пресл. $\varphi : C_* \to D_*$ комутира следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n(C_*) \otimes G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(C_* \otimes G) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_n(C_*) \otimes G \arrow[r] & H_n(C_* \otimes G) \arrow[r] & \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Специјално, кад за C_* узмемо сингуларни л.к. $S_*(X)$, где је X топ. пр., добијемо формулу за рачунање хомологије са коеф. у G преко „обичне" хомологије (са коеф. у $\mathbb{Z}$):

$$H_n(X; G) \cong \big(H_n(X) \otimes G\big) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G).$$

Пример $H_n(\mathbb{R}P^7) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,7 \\ \mathbb{Z}_2, & n=1,3,5 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, $G=\mathbb{Z}_2$

$$H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_n(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big) \oplus \operatorname{Tor}\big(H_{n-1}(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big)$$

$n\geq 8$: $H_n(\mathbb{R}P^7)$ и $H_{n-1}(\mathbb{R}P^7)$ су 0, па је $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2)=0$

$n=0$: $H_0(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong H_0(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$

$n=1$: $H_1(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_1(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}\big)\oplus \operatorname{Tor}\big(H_0(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$$\cong (\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\operatorname{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2$$

$n=2,4,6$: $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_n(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big)\oplus\operatorname{Tor}\big(H_{n-1}(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$$\cong (0\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) \cong 0\oplus\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$$

$n=3,5$: $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \big(H_n(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big)\oplus\operatorname{Tor}\big(H_{n-1}(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$$\cong (\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\operatorname{Tor}(0,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2$$

$n=7$: $H_7(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}) \cong \big(H_7(\mathbb{R}P^7)\otimes\mathbb{Z}_2\big)\oplus\operatorname{Tor}\big(H_6(\mathbb{R}P^7),\mathbb{Z}_2\big) \cong$

$$\cong (\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_2)\oplus\operatorname{Tor}(0,\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2\oplus 0 \cong \mathbb{Z}_2$$

Коначно, $H_n(\mathbb{R}P^7;\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & n=0,1,\dots,7 \\ 0, & n\geq 8 \end{cases}$

Кинетова формула

Кинетова формула нам даје везу између хомологије простора X и Y и хомологије њиховог производа $X\times Y$. Код фундаменталне групе имали смо једноставну формулу $\pi_1(X\times Y)\cong \pi_1(X)\times \pi_1(Y)$, док је у хомологији ситуација мало компликованија.

Теорема [Кинет] Нека су X и Y топ. пр. Тада постоји природан ктн. који се цепа:

$$0\to \bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)\to H_n(X\times Y)\to \bigoplus_{p+q=n-1}\operatorname{Tor}\big(H_p(X),H_q(Y)\big)\to 0$$

тј. имамо изоморфизам:

$$H_n(X\times Y)\cong\left[\bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)\right]\oplus\left[\bigoplus_{p+q=n-1}\operatorname{Tor}\big(H_p(X),H_q(Y)\big)\right].$$

Пример Одредити $H_*(\mathbb{R}P^2\times S^2)$.

$$H_n(\mathbb{R}P^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0\\ \mathbb{Z}_2, & n=1\\ 0, & n\geq 2\end{cases}\qquad H_n(S^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=0,2\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Примећујемо да за $n\geq 4$ је или $H_p(X)=0$ или $H_q(X)=0$ у $\bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)$, па је $\bigoplus_{p+q=n}\big(H_p(X)\otimes H_q(Y)\big)=0$.

Слично, за $n\geq 5$ је $\bigoplus_{p+q=n-1}\operatorname{Tor}\big(H_p(X),H_q(Y)\big)=0$.

Дакле, за $n \geq 5$ је $H_n(\mathbb{R}P^2 \times S^2) = 0$.

$H_0(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ (јер је $\mathbb{R}P^2 \times S^2$ путно повезан)

$$H_1(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \big(H_0(\mathbb{R}P^2) \otimes H_1(S^2)\big) \oplus \big(H_1(\mathbb{R}P^2) \otimes H_0(S^2)\big) \oplus$$
$$\oplus \operatorname{Tor}\big(H_0(\mathbb{R}P^2), H_0(S^2)\big) \cong$$
$$\cong \underbrace{(\mathbb{Z} \otimes 0)}_{0} \oplus \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}_2} \oplus \underbrace{\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{0} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \big(H_0(\mathbb{R}P^2) \otimes H_2(S^2)\big) \oplus \big(H_1(\mathbb{R}P^2) \otimes H_1(S^2)\big) \oplus \big(H_2(\mathbb{R}P^2) \otimes H_0(S^2)\big)$$
$$\oplus \operatorname{Tor}\big(H_0(\mathbb{R}P^2), H_1(S^2)\big) \oplus \operatorname{Tor}\big(H_1(\mathbb{R}P^2), H_0(S^2)\big) \cong$$
$$\cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) \oplus \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, 0) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z})}_{0} \cong$$
$$\cong \mathbb{Z}$$

$$H_3(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong (\mathbb{Z} \otimes 0) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, 0) \oplus \operatorname{Tor}(0, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$H_4(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong (\mathbb{Z} \otimes 0) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z}) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (0 \otimes \mathbb{Z})$$
$$\oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}, 0) \oplus \operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Tor}(0, 0) \oplus \operatorname{Tor}(0, \mathbb{Z}) = 0$$

Коначно,
$$H_n(\mathbb{R}P^2 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}_2, & n = 1, 3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases}$$