VII Хомологија ћелијских комплекса

деф. Ћелијски комплекс (или CW-комплекс) је Хаусдорфов простор X са колекцијом дисјунктних отворених ћелија e_α чија је унија простор X тд. важи:

(1) За сваку отворену n-дим. ћелију e^n_α постоји непр. пресл. $f_\alpha : D^n \to X$ тд. $f_\alpha|_{\text{int} D^n} : \text{int}\, D^n \to e^n_\alpha$ је хомеоморфизам (f_α се зове карактеристично пресликавање). Притом, ∂D^n се са f_α слика у унију коначно много ћелија димензије $\leq n-1$.

(2) Скуп $A \subseteq X$ је затворен у X ако и само ако је $A \cap \overline{e}_\alpha$ затворен у $\overline{e}_\alpha$ за свако α.

деф. Нека је X ћел. комплекс и $\{e_\alpha\}$ његове ћелије. k-скелет од X је скуп свих ћелија из X димензије највише k, тј.

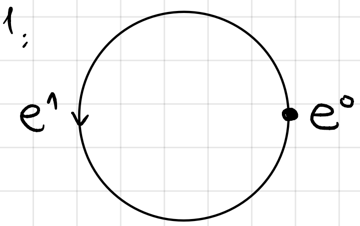
$$X^{(k)} \overset{\text{def}}{=} \{e^\alpha \mid \dim e_\alpha \leq k\}$$

деф. $A \subseteq X$ је ћелијски поткомплекс од X ако је и сам ћел. к.

Теорема Ако су X и Y ћел. к., онда је и $X \times Y$ ћел. к.

Пример Круг S^1 јесте један ћел. комплекс. Једна његова ћел. декомпозиција изгледа овако:

S^1:

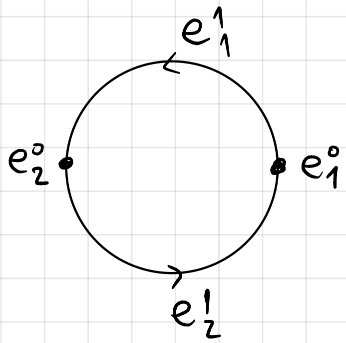


имамо једну 0-ћел: e^0 •

и једну 1-ћел: $e^1 \approx \longrightarrow \approx \text{int}\, D^1$

Топ. простор можемо на разне начине видети као ћел. к.

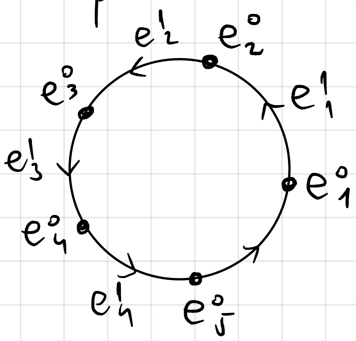
Тако S^1 има и следећу декомпозицију:



две 0-ћел: e^0_1, e^0_2

две 1-ћел: e^1_1, e^1_2

или нпр:

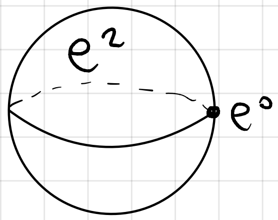


пет 0-ћел: $e^0_1, \dots, e^0_5$

пет 1-ћел: $e^1_1, \dots, e^1_5$

Пример Прве две декомпозиције из претходног примера су битне и могу се уопштити на S^n, $n \geq 2$.

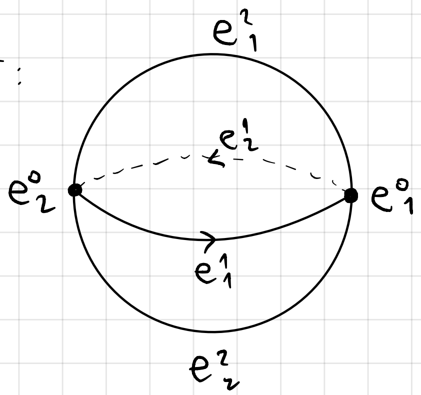
S^2:



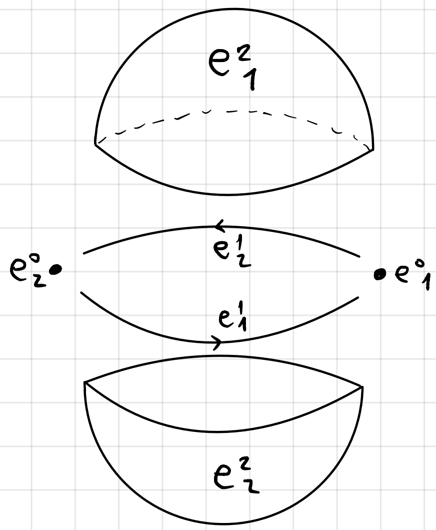
једна 0-ћел: e^0

једна 2-ћел: e^2

S^2:



тј:



две 0-ћел: e^0_1, e^0_2

две 1-ћел: e^1_1, e^1_2

две 2-ћел: e^2_1, e^2_2

пишемо и $S^2: e^0_1, e^0_2, e^1_1, e^1_2, e^2_1, e^2_2$

генерално имамо $S^n: e^0, e^n$ или $S^n: e^0_1, e^0_2, \dots, e^n_1, e^n_2$.

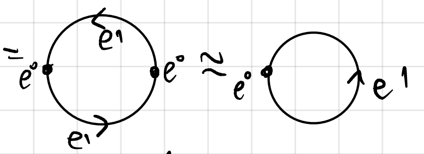
Пример $\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{x\sim -x}$ – реални пројективни простор димензије n

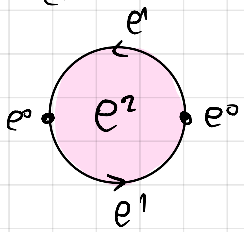
$\mathbb{R}P^n$ добијамо тако што на сфери S^n идентификујемо парове дијаметрално супротних тачака.

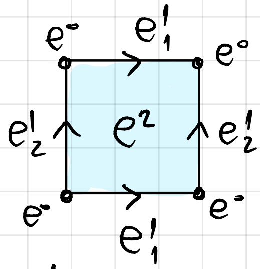
Кренемо од S^n и ћел. декомпозиције $S^n: e^0_1, e^0_2, \dots, e^n_1, e^n_2$.

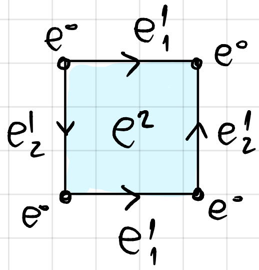
При овој идентификацији се идентификују e^0_1 и e^0_2, e^1_1 и e^1_2, ..., e^n_1 и e^n_2, па добијамо ћел. декомпозицију

$$\mathbb{R}P^n: e^0, e^1, \dots, e^n$$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 =$  $= S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 =$ 

Пример торус T^2: 

Клајнова боца K: 

Сада дефинишемо ћелијску хомологију.

Нека је X ћелијски простор. Имамо филтрацију

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X$$

($X_n = X^{(n)}$ је n-скелет од X). Може се показати да важи:

(1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in H_*(X, X_n))(\exists m \geq n)$ $i_*(x) = 0$, где је $i_*: H_*(X, X_n) \to H_*(X, X_m)$

(2) $H_q(X_n, X_{n-1}) = 0$ за $q \neq n$

Важи и више од (2):

Теорема За $q \neq n$ је $H_q(X_n, X_{n-1}) = 0$, а $H_n(X_n, X_{n-1})$ је слободна Абелова група чији генератори одговарају ћелијама од X димензије n.

Нека је $C_n \overset{\text{def}}{=} H_n(X_n, X_{n-1})$ и хоћемо да дефинишемо $d_n: C_n \to C_{n-1}$ (до сад је H_n увек била сингуларна хомологија).

Посматрамо дугачке тачне низове парова (X_n, X_{n-1}), $n \in \mathbb{N}$. Ови низови имају неке заједничке елементе, нпр. $H_n(X_n)$ се појављује у дтн. и за (X_n, X_{n-1}) и за (X_{n+1}, X_n):

$$\cdots \to H_n(X_{n-1}) \to H_n(X_n) \to H_n(X_n, X_{n-1}) \to \cdots$$

$$\|$$

$$\cdots \to H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_n(X_n) \to H_n(X_{n+1}) \to \cdots$$

Због тога можемо „испреплетати" дтн. на следећи начин:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & & \cdots \arrow[dl, "j_*"'] \\
C_{n+1} \arrow[dd, "d"'] & = & H_{n+1}(X_{n+1},X_n) \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & & H_n(X_n) \arrow[dl, "j_*"'] \\
C_n \arrow[dd, "d"'] & = & H_n(X_n,X_{n-1}) \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[dl, "j_*"'] \\
C_{n-1} \arrow[dd, "d"'] & = & H_{n-1}(X_{n-1},X_{n-2}) \arrow[dr, "\partial"] & \\
& & & H_{n-2}(X_{n-2}) \arrow[dl, "j_*"'] \\
C_{n-2} \arrow[d] & = & H_{n-2}(X_{n-2},X_{n-3}) \arrow[dr, "\partial"] & \\
\vdots & & & \cdots
\end{tikzcd}$$

дуг. н. за (X_{n+1},X_n)

дуг. н. за (X_n,X_{n-1})

дуг. н. за (X_{n-1},X_{n-2})

дуг. н. за (X_{n-2},X_{n-3})

Дефинишемо $d: C_n \to C_{n-1}$ као композицију:

$$d \overset{def}{=} j_* \circ \partial$$

Приметимо: $d^2 = j_* \circ \underbrace{\partial * j_*}_{=0} \circ \partial = 0$

јер су ови ∂ и j_* део истог дуг.н.
па је ова композиција тривијална
из тачности дуг.н.

Дакле, (C_n, d) јесте један ланчасти комплекс.

деф. Ћелијска хомологија ћелијског комплекса X је

$$H_n^{CW}(X) \overset{def}{=} H_n(C_*), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теорема Нека је X ћелијски комплекс. Тада је

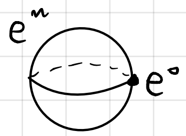
$$H_n^{CW}(X) \cong H_n(X), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

↑ ћелијска хомологије ↑ сингуларне хомологије

Дакле, може се показати да су ћел. и синг. хомологије исте, па ћемо користити исту ознаку: $H_n(X)$.

Сингуларне хомологије има једноставнији гранични оператор $d_n : C_n \to C_{n-1}$, док ћелијска хомологија има компликованије дефинисан d_n, али једноставније групе C_n. Због тога су обе дефиниције корисне.

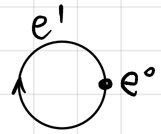
Пример $S^n : e^0, e^n$



$$C_* : \quad \cdots \to \underset{C_{n+1}}{0} \to \underset{C_n}{\mathbb{Z}} \to \underset{C_{n-1}}{0} \to \cdots \to \underset{C_1}{0} \to \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

тј. $C_i = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

1° $n = 0$: $S^0 = \bullet \;\; \bullet$ две тачке, па је $H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & k = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2° $n = 1$: $S^1 =$ 

$$C_* : \quad \cdots \to 0 \to \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{d_1} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

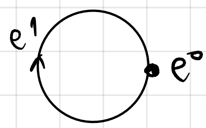
$C_1 \cong \mathbb{Z}$ је слободна Абелова група генерисана са e^1 што пишемо као $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1 \rangle$, предзнији

$$\mathbb{Z}\langle e_1 \rangle = \{ k \cdot e_1 \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Дакле, $C_1 \cong \mathbb{Z}$ значи да је C_1 изоморфно са $\mathbb{Z}$, али има разних група изо. $\mathbb{Z}$. Конкретно, $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1\rangle$, тј. C_1 је баш једнако групи свих целобројних умножака генератора e^1. Обе нотације су нам корисне, па их користимо по потреби. Овде нам треба прецизнија нотација:

$$C_* : \cdots \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

Очигледно је $d_i = 0$ за $i \neq 0$ (јер су или домен или кодомен од d_i једнаки 0). Пресликавање d_1 одређујемо из ћел. модела:



$$d_1(e^1) = [\text{почетак од } e^1] - [\text{крај од } e^1] = e^0 - e^0 = 0$$

d_1 слика генератор у 0, па је $d_1 \equiv 0$ јер

$$d_1(\underbrace{k\cdot e^1}_{\substack{\text{произвољни}\\ \text{ел. у } C_1}}) = k\cdot d_1(e^1) = k\cdot 0 = 0.$$

Закључујемо $d_i = 0$, за све $i \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow H_i(S^1) \cong \ker d_i / \operatorname{im} d_i = C_i/0 = C_i \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

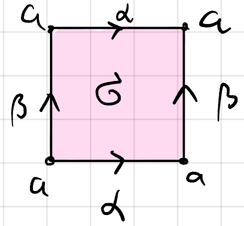
3° $n \geq 2$ $S^n : e^0, e^n$

$$C_* : \cdots \to 0 \to \overset{\overset{C_n}{\shortparallel}}{\mathbb{Z}\langle e^n\rangle} \to 0 \to \cdots \to 0 \to \overset{\overset{C_0}{\shortparallel}}{\mathbb{Z}\langle e^0\rangle} \to 0$$

Видимо да је $d_i = 0$, за свако $i \in \mathbb{Z}$, па је

$$H_i(S^n) \cong \ker d_i / \operatorname{im} d_i = C_i/0 = C_i \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример Торус T^2:



0-ћел: a

1-ћел: α, β

2-ћел: σ

$$C_* : \cdots \to 0 \to \underset{\overset{\|}{C_2}}{\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle} \xrightarrow{d_2} \underset{\overset{\|}{C_1}}{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle} \xrightarrow{d_1} \underset{\overset{\|}{C_0}}{\mathbb{Z}\langle a\rangle} \to 0$$

$d_i = 0$ за $i \neq 1,2$

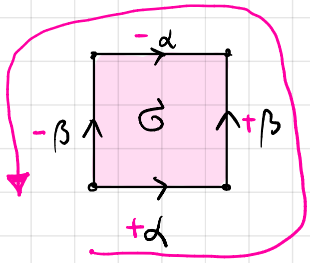
$C_i = 0$ за $i = 0,1,2 \Rightarrow H_i(T^2) = 0$ за $i \geq 3$.

$i=0$: T^2 је путно повезан, па је $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

$i=1$: $d_1(\alpha) = \underset{\text{почетак}}{a} - \underset{\text{крај}}{a} = 0$, $d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 \equiv 0$

$$d_2(\sigma) = \underbrace{\alpha + \beta - \alpha - \beta}_{} = 0 \Rightarrow d_2 \equiv 0$$

идемо у круг по граници од σ и све што је у смеру кретања додајемо, а што је у супротном смеру одузимамо

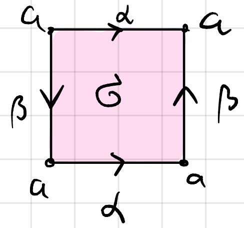


$$\Rightarrow H_1(T^2) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong C_1/0 \cong C_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$$

$i=2$: $H_2(T^2) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 \cong C_2/0 \cong C_2 \cong \mathbb{Z}$

Коначно, $$H_i(T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0,2 \\ \mathbb{Z}^2, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример Клајнова боца K:



0-ћел: a

1-ћел: α, β

2-ћел: σ

$$C_* : \cdots \to 0 \to \underset{C_2}{\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle} \xrightarrow{d_2} \underset{C_1}{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle} \xrightarrow{d_1} \underset{C_0}{\mathbb{Z}\langle a\rangle} \to 0$$

$d_i = 0$ за $i \neq 1,2$

$C_i = 0$ за $i = 0,1,2 \Rightarrow H_i(K) = 0$ за $i \geq 3$.

$i=0$: K је путно повезан, па је $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

$i=1$: $d_1(\alpha) = a - a = 0$, $d_1(\beta) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 \equiv 0$

$$d_2(\sigma) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$$

$\operatorname{im} d_2 = ?$

$$d_2(\underbrace{k \cdot \sigma}_{\text{произвољан ел. у } C_2}) = k \cdot d_2(\sigma) = k \cdot 2\beta = 2k \cdot \beta$$

$\Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \{k \cdot 2\beta \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle$

Дакле, $\operatorname{im} d_2 \cong \mathbb{Z}$, а прецизније $\operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle \leq C_1$

$\ker d_2 = ?$

$0 = d_2(k \cdot \sigma) = 2k\beta \iff k = 0$ (јер је β ген. па $\beta \neq 0$)

$\iff \ker d_2 = 0$

$$\Rightarrow H_1(K) \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong C_1 / \mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle = \frac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2\beta\rangle} \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \underbrace{\alpha + \beta = \beta + \alpha}_{\text{због } \oplus \ \alpha \text{ и } \beta \text{ комутирају}}, 2\beta = 0 \rangle \cong \langle \alpha \mid - \rangle \oplus \langle \beta \mid 2\beta = 0 \rangle$$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

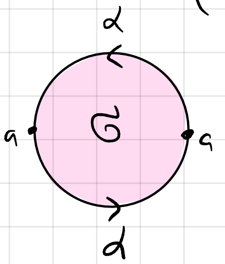
подсетити се задавање група помоћу генератора и релација

(Видети у белешкама са вежби ОТ представљање групе преко генератора и релација стр. 69-74)

$i=2$: $H_2(K) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 \cong 0/0 = 0$

Коначно, $H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Пример $\mathbb{R}P^2$



$$C_*: \cdots \to 0 \to \underset{\substack{\shortparallel \\ C_2}}{\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle} \xrightarrow{d_2} \underset{\substack{\shortparallel \\ C_1}}{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle} \xrightarrow{d_1} \underset{\substack{\shortparallel \\ C_0}}{\mathbb{Z}\langle a\rangle} \to 0$$

$d_1(\alpha) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 \equiv 0$

$d_2(\sigma) = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \ker d_2 = 0, \quad \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle$

$H_i(\mathbb{R}P^2) = 0, \quad i \neq 0,1,2$

$H_0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}$ (јер је путно повезан)

$H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = C_1 / \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle \cong \dfrac{\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle}{\mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle} \cong \langle \alpha \mid 2\alpha = 0\rangle \cong \mathbb{Z}_2$

$H_2(\mathbb{R}P^2) \cong \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = 0/0 = 0$

Дакле,

$$H_i(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}_2, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример Знамо $S^2=M_0$, $T^2=M_1$, $\mathbb{R}P^2=N_1$, $K=N_2$. Претходни резултати се могу уопштити:

$$H_i(M_g)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0\\ \mathbb{Z}^{2g}, & i=1\\ \mathbb{Z}, & i=2\\ 0, & \text{иначе}\end{cases},\quad g\in\mathbb{N}_0$$

$$H_i(N_k)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & i=0\\ \mathbb{Z}^{k-1}\oplus\mathbb{Z}_2, & i=1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Примећујемо: $H_2(M_g)\cong\mathbb{Z}$, $H_2(N_k)=0$. Важи и општије: ако је X повезана затворена многострукост, онда

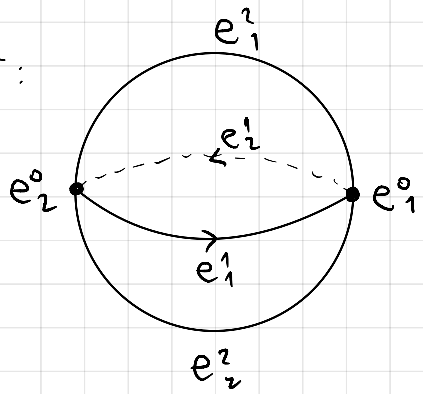
X је оријентабилна $\Leftrightarrow$ $H_n(X)\cong\mathbb{Z}$

X је неоријентабилна $\Leftrightarrow$ $H_n(X)=0$

Пример $\mathbb{R}P^n$: $e^0, e^1, \dots, e^n$

Ћелијска декомпозиција $\mathbb{R}P^n$ добијена је помоћу декомпозиције сфере:

S^2:



Код сфере S^n имамо:

$$C_* : \dots \to 0 \to C_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_0 \to 0$$

где је $C_k = \mathbb{Z}\langle e_1^k \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle e_2^k \rangle$, $k = \overline{0,n}$

$d_0 = 0$

$d_1(e_1^1) = e_1^0 - e_2^0$, $d_1(e_2^1) = e_2^0 - e_1^0$

$d_2(e_1^2) = e_1^1 + e_2^1$, $d_2(e_2^2) = e_1^1 + e_2^1$

$d_3(e_1^3) = e_1^2 - e_2^2$, $d_3(e_2^3) = e_2^2 - e_1^2$

$d_4(e_1^4) = e_1^3 + e_2^3$, $d_4(e_2^4) = e_1^3 + e_2^3$

$\vdots$

У случају $\mathbb{R}P^n$ имамо:

$$C_* : \dots \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^n \rangle \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z}\langle e^{n-1} \rangle \to \dots \to \mathbb{Z}\langle e^2 \rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle e^1 \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle \to 0$$

где смо e^k добили идентификацијом e_1^k и e_2^k са S^n, па d_k код $\mathbb{R}P^n$ добијамо као у d_k од S^n обришемо све индексе:

$d_1(e^1) = e^0 - e^0 = 0$

$d_2(e^2) = e^1 + e^1 = 2e^1$

$d_3(e^3) = e^2 - e^2 = 0$

$d_4(e^4) = e^3 + e^3 = 2e^3$

$\vdots$

Дакле, $d_{2i}(e^{2i}) = 2e^{2i-1}$, $d_{2i+1}(e^{2i+1}) = 0$, па добијамо

тј. d_{2i} је множење са 2

1° n парно

$$C_* : \quad \cdots \to 0 \to \underset{C_n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_{n-1}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_{n-2}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \cdots \xrightarrow{0} \underset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$H_0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_i(\mathbb{R}P^n) = 0, \quad i > n$$

$$H_{2i}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i} / \operatorname{im} d_{2i+1} = 0/0 = 0, \quad 0 < 2i \leq n$$

$$H_{2i+1}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i+1} / \operatorname{im} d_{2i+2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2, \quad 2i+1 \leq n$$

2° n непарно

$$C_* : \quad \cdots \to 0 \to \underset{C_n}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_{n-1}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_{n-2}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \cdots \xrightarrow{0} \underset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$H_0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_i(\mathbb{R}P^n) = 0, \quad i > n$$

$$H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} \cong C_n/0 \cong \mathbb{Z}$$

$$H_{2i}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i} / \operatorname{im} d_{2i+1} = 0/0 = 0, \quad 0 < 2i < n$$

$$H_{2i+1}(\mathbb{R}P^n) \cong \ker d_{2i+1} / \operatorname{im} d_{2i+2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2, \quad 2i+1 < n$$

Оба случаја можемо заједно записати као:

$$H_i(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, \ i = n \text{ паран} \\ \mathbb{Z}_2, & i \text{ непаран и } i \leq n-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$