VI Аксиоме хомологије

деф. Категорија $\mathcal{A}$ парова топ. пр. (X,A) је допустива ако важи

(1) $(X,A)\in\mathcal{A} \Rightarrow (X,X),(X,\emptyset),(A,A),(A,\emptyset)\in\mathcal{A}$;

(2) $(X,A)\in\mathcal{A} \Rightarrow (X\times I, A\times I)\in\mathcal{A}$ $\quad (I=[0,1])$;

(3) постоји топ. пр. P т.д. $|P|=1$ и $(P,\emptyset)\in\mathcal{A}$.

Категорија свих тополошких парова Top_2 је очигледно допустива.

деф. [Ајленберг - Стинрод] Хомолошка теорија на допустивој класи парова тополошких простора $\mathcal{A}$ је низ функтора

$$H_n : \mathcal{A} \to Ab, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

са низом природних трансформација

$$\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,\emptyset), \quad n\in\mathbb{N}$$

т.д. су испуњени следећи услови:

(1) аксиома тачности: низ

$$\cdots \to H_n(A,\emptyset) \xrightarrow{i_*} H_n(X,\emptyset) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,\emptyset) \to \cdots$$

је тачан, где су $i : A \hookrightarrow X$ и $j : \emptyset \hookrightarrow A$ инклузије

(2) аксиома хомотопије: ако су $h,k : (X,A)\to(Y,B)$ и $h\simeq k$, онда је $h_* = k_*$

(3) аксиома исецања: ако су $A,B\subseteq X$ т.д. $X=\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B$, онда је $H_n(B,A\cap B)\cong H_n(X,A)$ за свако n.

(4) аксиома димензије: ако је $|P|=1$, онда

$$H_n(P,\phi) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(5) аксиома компактног носача: ако $(X,A)\in \mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha \in H_n(X,A)$, онда постоји допустиви пар (X_0,A_0) тд. $X_0 \subseteq X$, $A_0 \subseteq A$, X_0 и A_0 су компактни и $\alpha \in \operatorname{im} i_*$, где је $i_*: H_n(X_0,A_0) \to H_n(X,A)$.

Хомологија тополошког простора се може дефинисати на више начина (ми смо за сада видели само један - сингуларну хомологију). Појам хомолошке теорије је уопштење хомологије простора, тј. сингуларна хомологија јесте једна хомолошка теорија јер задовољава свих 5 аксиома. Разлог за ову генерализацију је то што нека битна тврђења можемо доказати само помоћу ових 5 аксиома, не улазећи у детаље како је која хомолошка теорија тачно дефинисана.

деф. Ако хомолошка теорија задовољава све сем четврте аксиоме, назива се генерализованом хомолошком теоријом.

Једна од последица аксиома је тзв. Мајер-Вијеторисов низ (краће МВ).

Занимљивост: Leopold Vietoris је живео 110 година и 309 дана.

Нека су $A, B \subseteq X$ и означимо инклузије:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "k"] & \\ A \cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "\ell"'] & \end{tikzcd}$$

Теорема [Мајер-Виеторис] Нека су $A, B \subseteq X$ т.д. важи $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Тада је следећи низ тачан:

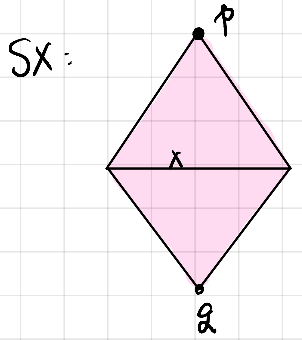
$$\cdots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\phi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

где је $\phi_*(x) = (i_*(x), -j_*(x))$ и $\psi_*(a,b) = k_*(a) + \ell_*(b)$.

(Сличан низ постоји и у редукованој хомологији – свуда уместо H_* ставимо $\tilde{H}_*$.)

Пример X – топ. пр., $SX = X \times [-1,1] \Big/ \begin{smallmatrix}(x,1)\sim(y,1),\\ (x,-1)\sim(y,-1),\\ (\forall x,y \in X)\end{smallmatrix}$ – суспензија

SX:



Уочимо подскупове од SX:

$A = SX \setminus \{p\} \simeq CX \simeq *$ $\quad$ (CX = конус)

$B = SX \setminus \{q\} \simeq CX \simeq *$

$A \cap B = SX \setminus \{p, q\} \simeq X$

Применимо МВ на $SX = A \cup B$:

$$\cdots \to \tilde{H}_n(A) \oplus \tilde{H}_n(B) \to \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n-1}(A \cap B) \to \tilde{H}_{n-1}(A) \oplus \tilde{H}_{n-1}(B) \to \cdots$$

$$\cdots \to \underbrace{\tilde{H}_n(CX)}_{0} \oplus \underbrace{\tilde{H}_n(CX)}_{0} \to \tilde{H}_n(SX) \to \tilde{H}_{n-1}(X) \to \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(CX)}_{0} \oplus \underbrace{\tilde{H}_{n-1}(CX)}_{0} \to \cdots$$

$\Rightarrow$ имамо тачан низ: $0 \to \tilde{H}_n(SX) \to \tilde{H}_{n-1}(X) \to 0$

$$\Rightarrow \quad \tilde H_n(SX) \cong \tilde H_{n-1}(X).$$

Специјално, ако је S^m сфера димензије m, видели смо раније $S^m = S(S^{m-1}) = S(S(S^{m-2})) = \dots$

па је
$$\tilde H_n(S^m) \cong \tilde H_{n-1}(S^{m-1}) \cong \tilde H_{n-2}(S^{m-2}) \cong \dots \quad (*)$$

Лако можемо одредити хомологију од $S^0 = \bullet\ \bullet$ (2 тачке)

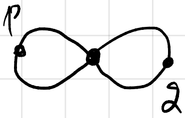
$$\tilde H_n(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & иначе \end{cases}$$

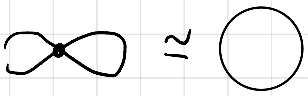
па из (*) добијамо

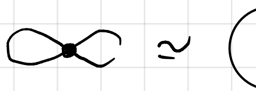
$$\tilde H_n(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=m \\ 0, & иначе \end{cases}, \qquad m \geq 1$$

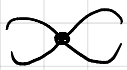
тј. пошто је $H_0 \cong \tilde H_0 \oplus \mathbb{Z}$,

$$H_n(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,m \\ 0, & иначе \end{cases}, \qquad m \geq 1.$$

Пример $X =$  $= S^1 \vee S^1$

$A = X \setminus \{p\} =$  $= S^1$

$B = X \setminus \{q\} =$  $= S^1$

$A \cap B =$  $\simeq *$

МВ низ: $\dots \to \tilde H_n(A\cap B) \longrightarrow \tilde H_n(A) \oplus \tilde H_n(B) \longrightarrow \tilde H_n(X) \to \tilde H_{n-1}(A \cap B) \to \dots$

$$\dots \to \underbrace{\tilde H_n(*)}_{0} \longrightarrow \tilde H_n(S^1) \oplus \tilde H_n(S^1) \longrightarrow \tilde H_n(X) \to \underbrace{\tilde H_{n-1}(*)}_{0} \to \dots$$

$$\Rightarrow \tilde H_n(X) \cong \tilde H_n(S^1) \oplus \tilde H_n(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & n=1 \\ 0, & иначе \end{cases}$$