V Сингуларна хомологија

Желимо да дефинишемо хомологију тополошког простора X. За сада смо дефинисали само хомологију л.к. па хомологију од X дефинишемо у 2 корака:

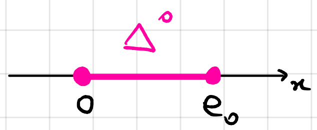
$$X \rightsquigarrow \underset{\text{сингуларни л.к.}}{S_*(X)} \rightsquigarrow H_n(X) \overset{def}{=} \underbrace{H_n(S_*(X))}_{\text{хомологија л.к. } S_*(X)}$$

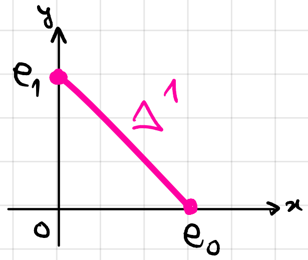
Дакле, прво дефинишемо л.к. $S_*(X)$ придружен топ. пр. X.

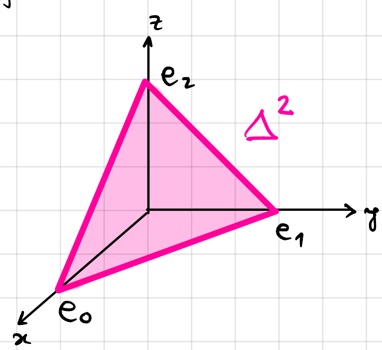
деф. Стандардни n-симплекс је
$$\Delta^n = \underset{\uparrow \text{ конвексни омотач}}{conv}\{e_0, e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

тј. $\Delta^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$

($e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$)







(конвексни омотач је најмањи конвексни скуп који садржи дате тачке)

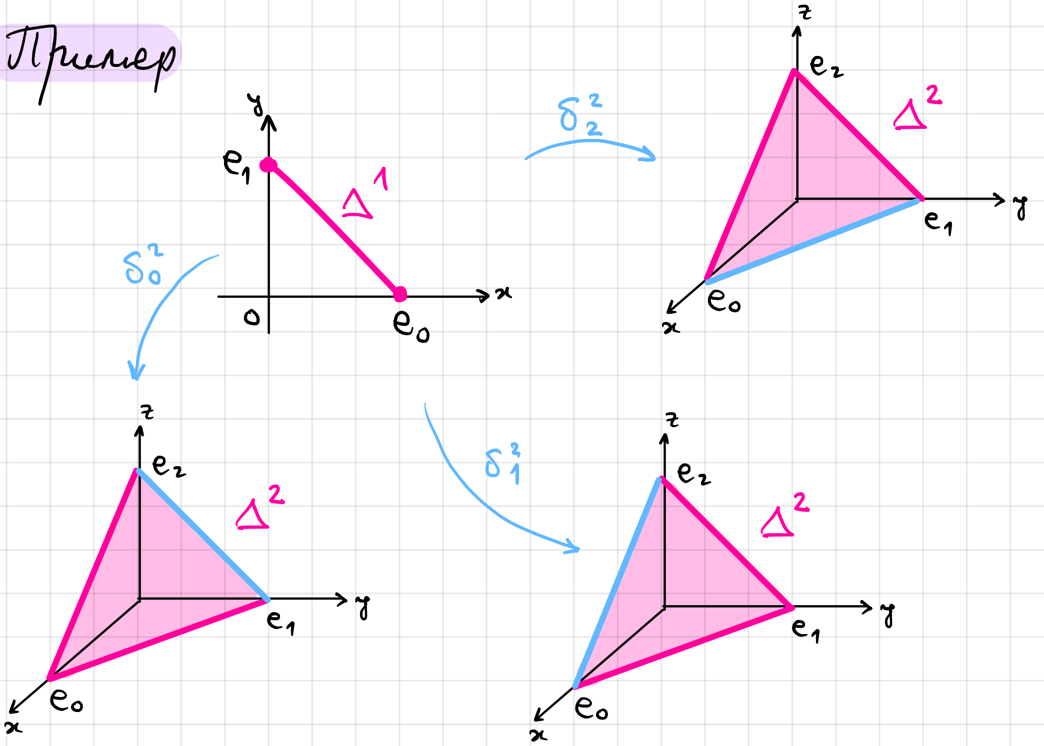
уочимо афино пресликавање $\delta_i^n : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ дато са

$$\delta_i^n(x_0, \dots, x_{n-1}) \overset{def}{=} (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

(тј. δ_i^n убацује 0 на i-тој координати)

Често пишемо само δ_i кад знамо шта је n.

Пример



δ_i^2 слика Δ^1 у ивицу у Δ^2 наспрам темена e_i

деф. Сингуларни n-симплекс у топ. простору X је непр. пресликавање $\sigma : \Delta^n \to X$. Нека је $\Delta_n(X)$ скуп свих сингуларних n-симплекса у X. Група сингуларних n-дим. ланаца је $S_n(X) \overset{\text{df}}{=} F[\Delta_n(X)]$ (слободна Абелова група генерисана са $\Delta_n(X)$, тј. $S_n(X) = \bigoplus_{\sigma\in\Delta_n(X)} \mathbb{Z}$).

i-та страна симплекса σ је $\sigma\circ\delta_i^n$

За $\sigma \in \Delta^n(X)$ дефинишемо $d(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma\circ\delta_i^n$

(d генеришемо на генераторима овако, а онда се прошири на цео $S_n(X)$ тд. да буде хомоморфизам). Дакле, имамо

$$S_*(X) : \cdots \to S_{n+1}(X) \xrightarrow{d} S_n(X) \xrightarrow{d} S_{n-1}(X) \to \cdots \to S_1(X) \to S_0(X) \to 0$$

Став $S_*(X)$ је л.к.

доказ: Све што треба да се докаже је $d^2=0$, а то је довољно показати на генераторима.

Посматрајмо
$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "d"] \arrow[rr, bend right, "d^2"'] & S_{n-1}(X) \arrow[r, "d"] & S_{n-2}(X) \end{tikzcd}$$
и нека је $\sigma \in \Delta_n(X)$

$$(d\circ d)(\sigma) \overset{\text{деф. } d}{=} d\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^n \underbrace{\sigma\circ\delta_i^n}_{\text{ген. у } S_{n-1}(X)}\Big) \overset{d \text{ је хомо.}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d(\sigma\circ\delta_i^n) =$$

$$\overset{\text{деф. } d}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (\sigma\circ\delta_i^n)\circ\delta_j^{n-1} \qquad (\star)$$

Како изгледа $\delta_q^n \circ \delta_p^{n-1}$, $p<q$?

$$(x_0,\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_p^{n-1}}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{p-1},0,x_p,\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_q^n}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{p-1},\overset{\text{позиција } p}{0},x_p,\dots,x_{q-2},\overset{\text{позиција } q}{0},x_{q-1},\dots,x_{n-2})$$

Дакле, $\delta_q^n \circ \delta_p^{n-1} : \Delta^{n-2} \to \Delta^n$ слика Δ^{n-2} у страну од Δ^n наспрам темена e_p и e_q

Посматрајмо сад $\delta_p^n \circ \delta_{q-1}^{n-1}$, $p<q$:

$$(x_0,\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_{q-1}^{n-1}}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{q-2},0,x_{q-1},\dots,x_{n-2}) \overset{\delta_p^n}{\longmapsto} (x_0,\dots,x_{p-1},\overset{\text{позиција } p}{0},x_p,\dots,x_{q-2},\overset{\text{позиција } q}{0},x_{q-1},\dots,x_{n-2})$$

Дакле, $\delta_q^n \circ \delta_p^{n-1} = \delta_p^n \circ \delta_{q-1}^{n-1}$ (за $p<q$). То значи да у $(\star)$ имамо парове истих сабирака за $i=q, j=p$ и $i=p, j=q-1$, АЛИ ови сабирци су супротног знака јер је један $(-1)^{i+j}=(-1)^{p+q}$, а други $(-1)^{i+j}=(-1)^{p+q-1}$, па их можемо скратити. Коначно, $d^2=0$. ∎

деф. n-та хомолошка група топ. пр. X је
$$H_n(X) \overset{\text{def}}{=} H_n(S_*(X))$$

Коментар Нека је Ab категорија Абелових група и хомоморфизама, CAb категорија ланчастих комплекса и ланчастих пресл., а Top категорија тополошких пр. и непр. пресл. (за основне појмове у теорији категорија видети белешке са вежби).

Ланчаста хомологија је један функтор из CAb у Ab:

$$\begin{aligned} \mathrm{CAb} &\xrightarrow{H_n} \mathrm{Ab} \\ C_* &\longmapsto H_n(C_*) \\ [\varphi : C_* \to D_*] &\longmapsto [\varphi_* : H_n(C_*) \to H_n(D_*)] \end{aligned}$$

Слично, сингуларну хомологију можемо видети као композицију два функтора:

$$\begin{aligned} \mathrm{Top} &\xrightarrow{S_*} \mathrm{CAb} \xrightarrow{H_n} \mathrm{Ab} \\ X &\longmapsto S_*(X) \longmapsto H_n(S_*(X)) =: H_n(X) \\ [f : X \to Y] &\mapsto [f_\# : S_*(X) \to S_*(Y)] \mapsto [f_* : H_n(X) \to H_n(Y)] \qquad A* \end{aligned}$$

Раније смо видели још један функтор (фунд. гр.):

$$\begin{aligned} \mathrm{Top}_0 &\xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Gr} \\ (X, x_0) &\longmapsto \pi_1(X, x_0) \\ [f : (X, x_0) \to (Y, y_0)] &\longmapsto [f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)] \end{aligned}$$

Сада да видимо како се дефинишу $f_\#$ и f_* из A*.

Нека је $f : X \to Y$ непр. Дефинишемо $f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ на генераторима са $f_\#(\underset{\Delta_n(X)}{\underset{\cap}{\sigma}}) := \underbrace{f \circ \sigma}_{\substack{\cap \\ \Delta_n(Y)}}$.

Пресликавање $f_\#$ је ланчасто (тј. комутира са d):

$$(f_\# \circ d)(\sigma) = f_\#\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \delta_i^n\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_\#(\sigma \circ \delta_i^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \delta_i^n = d(f \circ \sigma) = d(f_\#(\sigma)) = (d \circ f_\#)(\sigma)$$

Како је $f_\#$ ланчасто, оно индукује пресл. у хомологији:

$$f_* : H_n(S_*(X)) \to H_n(S_*(Y)),$$

$$\text{тј. } f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

деф. Редуковани л.к. од $S_*(X)$ је

$$\tilde{S}_*(X) : \underbrace{\cdots \to S_n(X) \to S_{n-1}(X) \to \cdots \to S_1(X) \to S_0(X)}_{S_*(X)} \xrightarrow{\varepsilon} \underbrace{S_{-1}(X) \to 0}_{\text{ово додајемо}}$$

где је $S_{-1}(X) \cong \mathbb{Z}$ и означимо њен ген. са $*$ и дефинишимо ε на следећи начин:

$$S_0(X) = F[\Delta_0(X)], \quad \Delta_0(X) = \{\sigma : \underset{\text{1 тачка}}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{\Delta^0}}} \to X \mid \sigma \text{ непр.}\} \approx X$$

Дакле, $S_0(X)$ је слободна Абелова гр. ген. са X, па ε дефинишемо на генераторима: $(\forall x \in X)\ \varepsilon(x) \overset{\text{def}}{=} *$.

деф. Редукована хомологија од X је

$$\tilde{H}_n(X) \overset{\text{def}}{=} H_n(\tilde{S}_*(X)).$$

Став

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X), & n \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \end{cases}$$

Претходни став нам говори да се H_n и $\tilde{H}_n$ разликују једино за $n=0$.

деф. Ако је (X,A) тополошки пар (тј. X топ. пр. и $A \subseteq X$), релативни л.к. пара (X,A) је $S_*(X,A)$, где је

$$S_n(X,A) \overset{def}{=} S_n(X)/S_n(A).$$

$$\begin{array}{ccccc} S_*(X,A): & \cdots \to S_n(X)/S_n(A) & \xrightarrow{d} & S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A) \to \cdots \\ & [c] & \longmapsto & [d(c)] \end{array}$$

деф. Релативне хомологије пара (X,A) је

$$H_n(X,A) \overset{def}{=} H_n(S_*(X,A))$$

(притом $H_n(X,\emptyset) = H_n(X)$)

Ако је (X,A) тополошки пар, имамо ктн. л.к.

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i_\#} S_*(X) \xrightarrow{q} S_*(X,A) \to 0$$

($i: A \hookrightarrow X$ је инклузија).

На основу цик-цак леме добијамо дтн:

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

Овај низ се зове дуги тачан низ у хомологији пара (X,A).

Став $H_0(X)$ је слободна Абелова група генерисана компонентама путне повезаности од X (тј. ако X има k компоненти путне пов., онда је $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$).

Пример $H_0(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \geq 1 \\ \mathbb{Z}^2, & n=0 \end{cases}$