IV Хомологија ланчастих комплекса

деф. Ланчасти комплекс (л.к.) C_* је низ Абелових група и хомоморфизама тих Абелових група $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $d_n : C_n \to C_{n-1}$ тд. $(\forall n\in\mathbb{Z})$ $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Пишемо:
$$C_* : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots$$

Напомене: (1) л.к. је слободан ако су све групе C_n, $n\in\mathbb{Z}$ слободне;

(2) л.к. је ненегативан ако је $C_n = 0$ за $n < 0$;

(3) d_n је гранични оператор и често се обележава само са d, а из контекста знамо шта је n (нпр. $d_{n+1}\circ d_n = 0$ краће пишемо $d^2 = 0$);

деф. Група циклова у C_* је
$$Z_n(C_*) \overset{def}{=} \ker d_n \leq C_n.$$

Група граница у C_* је
$$B_n(C_*) \overset{def}{=} \operatorname{im} d_{n+1} \leq C_n.$$

Притом $B_n \leq Z_n$ (следи из услова $d^2=0$).

деф. n-та хомолошка група л.к. C_* је
$$H_n(C_*) \overset{def}{=} Z_n(C_*)/B_n(C_*)$$

Пример $C_* : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{0} C_n \xrightarrow{0} C_{n-1} \to \cdots$ $\quad (d_n = 0,\ \forall n)$

$$H_n(C_*) = \ker 0/\operatorname{im} 0 = C_n/0 = C_n$$

деф. Нека су $C_* = (C_n, d_n)$ и $C'_* = (C'_n, d'_n)$ два л.к.
Ланчасто пресликавање $\phi : C_* \to C'_*$ је низ хомоморфизама $\phi_n : C_n \to C_{n-1}$ тд. $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $d'_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ d_n$,
тј. комутира следећи дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ланчасто пресл. $\phi : C_* \to C'_*$ индукује пресл. ϕ_* у хомологији, тј. имамо $\phi_* : H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$, $n \in \mathbb{Z}$, дато на следећи начин.

$$H_n(C^*) = Z_n(C^*) / B_n(C^*)$$

елементи у $H_n(C^*)$ су облика $[z]$, где је $z \in Z_n(C^*)$ (тј. $z \in \ker d_n$, тј. $d_n(z) = 0$). Дефинишемо ϕ_* са:

$$\phi_*([z]) \overset{def}{=} [\phi_n(z)]$$

Треба показати да је ово пресл. добро дефинисано, тј. да

1. не зависи од избора представника класе $[z]$
2. $\phi_n(z) \in Z_n(C'_*)$

1: Нека је $[z] = [z'] \in H_n(C^*)$.

$$[z] = [z'] \iff [z - z'] = 0 \text{ (у } H_n) \iff z - z' \in B_n(C^*) = \operatorname{im} d_{n+1}$$
$$\iff (\exists c \in C_{n+1})\ z - z' = d_{n+1}(c) \iff z = z' + d_{n+1}(c)$$

$$\phi_*([z]) = \phi_*([z' + d_{n+1}(c)]) = [\phi_n(z' + d_{n+1}(c))] = [\phi_n(z') + \phi_n(d_{n+1}(c))] =$$
$$= [\phi_n(z')] + \underbrace{[d'_{n+1}(\phi_{n+1}(c))]}_{\substack{=0 \\ \text{јер } \in B_n(C'_*)}} = [\phi_n(z')] = \phi_*([z'])$$

2: $\phi_n(z) \in Z_n(C'_*)$?

$$d'_n(\phi_n(z)) = \phi_{n-1}(d_n(z)) = \phi_{n-1}(0) = 0 \checkmark$$

Дакле ϕ_* је добро дефинисано, а јесте и хомоморфизам.

деф. Нека је $\phi: C_* \to C'_*$ ланчасто прес. Тада је ϕ_* хомоморфизам у хомологији индукован са ϕ.

Став (1) за $\phi = \mathbb{1}$ (идентитет) имамо $\phi_* = \mathbb{1}_{H_n(C^*)}$

(2) $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$

Тачни низови

деф. Низ Абелових група и хомоморфизама

$$\cdots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \cdots$$

је тачан на месту B ако је $\ker g = \operatorname{im} f$.

Низ је тачан ако је тачан на сваком месту.

Напомене (1) Ако је $C_*: \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots$ тачан низ, онда је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1} = 0$, за свако $n \in \mathbb{Z}$

(2) Ако у тачном низу имамо $0 \to A \xrightarrow{f} B \to \cdots$ онда је f „1-1" (јер $\ker f = \operatorname{im} 0 = 0$)

(3) Ако у тачном низу имамо $\cdots \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ онда је f „на" (јер $\operatorname{im} f = \ker 0 = B$)

(4) Ако је $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ тачан низ, онда је f изоморфизам.

деф. Кратак тачан низ (ктн.) је тачан низ облика

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

(у ктн. је увек f „1-1" и g „на")

деф. Кратак тачан низ се цепа ако је $\operatorname{im} f$ директан сабирак групе B, тј. ако

$$(\exists D \leq B) \quad B \cong \operatorname{im} f \oplus D.$$

Теорема Нека је $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ ктн. Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) низ се цепа;

(2) постоји хомоморфизам $p : B \to A$ т.д. $p \circ f = 1_A$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, bend left, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(3) постоји хомоморфизам $j : C \to B$ т.д. $g \circ j = 1_C$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, "j"] & 0 \end{tikzcd}$$

(4) $B \cong A \oplus C$.

Последица Ктн. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ у коме је група C слободна Абелова група се цепа.

Пример $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \dots, \mathbb{Z}^n$ су слободне па се сваки ктн. облика

$$0 \to A \to B \to \mathbb{Z}^n \to 0$$

цепа, тј. важи $B \cong A \oplus \mathbb{Z}^n$

Подсетник Ако су G_n, $n\in\mathbb{N}$ групе, дефинишемо:

$$G_1\times G_2\times\cdots\times G_n\times\cdots = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n = \Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \;\Big|\; g_n\in G_n\Big\}$$

производ група

формална сума – други запис за низ $(g_1,g_2,g_3,\dots)$

$$G_1\oplus G_2\oplus\cdots\oplus G_n\oplus\cdots = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n = \Big\{\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n \;\Big|\; \text{сви сем коначно много } g_n \text{ су } 0\Big\} \le \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

директна сума група

Дакле, у општем случају је $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n \le \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Специјално, ако имамо коначно много група онда је

$$G_1\times\cdots\times G_n = G_1\oplus\cdots\oplus G_n$$

па зато пишемо нпр. $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^2$ и слично.

Пример $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{\cdot 2}\mathbb{Z}\xrightarrow{\bmod 2}\mathbb{Z}_2\to 0$ је КТН. који се не цепа (да се цепа било би $\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ што је немогуће)

деф. Низ ланчастих комплекса

$$0\to C_*\xrightarrow{\phi}D_*\xrightarrow{\psi}E_*\to 0 \quad (*)$$

је КТН. ако је тачан на сваком нивоу, тј. за свако $n\in\mathbb{N}$

$$0\to C_n\xrightarrow{\phi_n}D_n\xrightarrow{\psi_n}E_n\to 0$$

је тачан.

(*) је кратки запис за дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d"] & D_{n+1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "d"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d"] & D_n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "d"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & D_{n-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Теорема [цик-цак лема] Нека је дат ктн. л.к.

$$0 \to C_* \xrightarrow{\phi} D_* \xrightarrow{\psi} E_* \to 0$$

Тада постоји дуг тачан низ

$$\cdots \to H_n(C_*) \xrightarrow{\phi_*} H_n(D_*) \xrightarrow{\psi_*} H_n(E_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C_*) \to \cdots$$

Теорема [Стинродова 5-лема] Нека је дат комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

Ако су f_2 и f_4 изоморфизми, f_1 епиморфизам и f_5 мономорфизам, онда је f_3 изоморфизам.