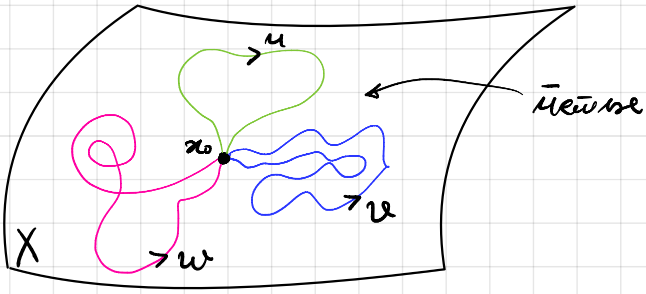
Фундаментална група

Нека је X топ. пр. и $x_0 \in X$ фиксирана (базна) тачка. Пар (X, x_0) називамо топ. простором са базном тачком.

деф. Петља у (X, x_0) је пут $u : I \to X$ (u је непр.) са истим почетком и крајем, тј. $u(0) = u(1) = x_0$.



Означимо са $P(X, x_0)$ скуп свих петљи у x_0, тј.

$$P(X, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{ u : I \to X \mid u \text{ непр.}, \ u(0) = u(1) = x_0 \}$$

деф. Надовезивањем петље $v \in P(X, x_0)$ на $u \in P(X, x_0)$ добијамо петљу $u \cdot v \in P(X, x_0)$ дату са

$$(u \cdot v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ v(1-2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Став Нека су $u, u', v, v' \in P(X, x_0)$ тд.

$$u \simeq u' \ (\text{rel } \{0,1\}), \quad v \simeq v' \ (\text{rel } \{0,1\}).$$

Тада $u \cdot v \simeq u' \cdot v' \ (\text{rel } \{0,1\})$.

Релација $\simeq (\text{rel}\ \{0,1\})$ јесте једна рел. екв. на $P(X,x_0)$, па дефинишемо скуп класа ове релације:

$$\pi_1(X,x_0) \overset{\text{def}}{=} P(X,x_0)/_{\simeq (\text{rel}\ \{0,1\})}$$

Елементи скупа $\pi_1(X,x_0)$ су класе $[u]$, где је $u \in P(X,x_0)$ и притом

$$[u] = [v] \iff u \simeq v\ (\text{rel}\ \{0,1\})$$

На $\pi_1(X,x_0)$ дефинишемо операцију $*$:

$$[u] * [v] \overset{\text{def}}{=} [u \cdot v]$$

Претходни став нам гарантује да је ова операција добро дефинисана.

За $u \in P(X,x_0)$ дефинишемо $u^{-1} : P(X,x_0)$ као петљу која има исту путању као u, али обрнут смер, тј.

$$u^{-1}(t) \overset{\text{def}}{=} u(1-t), \quad t \in I$$

и нека је $[u]^{-1} \overset{\text{def}}{=} [u^{-1}]$.

Коначно, означимо са $c_{x_0} \in P(X,x_0)$ константну петљу, тј. $c_{x_0}(t) = x_0$, $t \in I$.

Теорема Скуп $\pi_1(X,x_0)$ јесте група у односу на операцију $*$. Њен неутрал је $[c_{x_0}]$, а инверз елемента $[u]$ је $[u]^{-1}$.

Дакле у $\pi_1(X,x_0)$ важи:

(1) $([u] * [v]) * [w] = [u] * ([v] * [w])$ (асоцијативност)

(2) $[c_{x_0}] * [u] = [u] * [c_{x_0}] = [u]$ (неутрал)

(3) $[u] * [u]^{-1} = [u]^{-1} * [u] = [c_{x_0}]$ (инверз)

деф. Групу $\pi_1(X,x_0)$ називамо **фундаменталном групом** простора X са базном тачком x_0.

Пример (1) $X=\{x_0\}$, онда је $\pi_1(X,x_0)=0$
(овде 0 представља тривијалну групу која има само један елемент - неутрал)

(2) $X=\mathbb{R}^n$, $x_0=0$. Видели смо раније да су свака два пресликавања са кодоменом $\mathbb{R}^n$ хомотопна, па

$$u,v\in P(\mathbb{R}^n,0) \Rightarrow u\simeq v \Rightarrow [u]=[v]$$

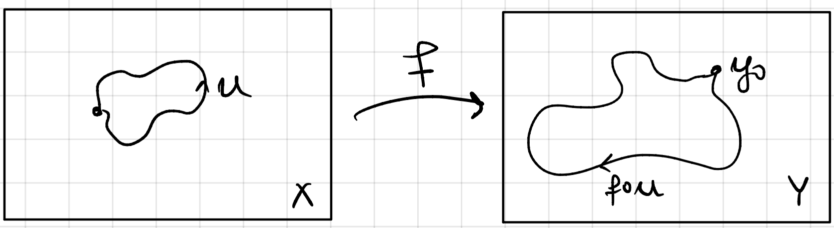
$\Rightarrow$ сви ел. у $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)$ су исти, тј. $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)=0$

Коментар Постоје и више хомотопске групе $\pi_n(X,x_0)$, $n\geq 1$, па отуд ознака π_1.

Хомоморфизам индукован пресликавањем

Нека су (X,x_0) и (Y,y_0) топ. пр. и $f:X\to Y$ непр. тд. $f(x_0)=y_0$. (Пишемо и $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$)

деф. Пресликавање $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ индуковано са f дато је са $f_*([u])\overset{def}{=}[f\circ u]$, $[u]\in\pi_1(X,x_0)$.



$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ I \arrow[ur, "u"] \arrow[r, dashed, "f\circ u"'] & Y \end{tikzcd}$$

Став f_* је хомоморфизам група.

доказ: Желимо да покажемо да f_* чува операцију, тј. да
$$f_*([u]*[v]) = f_*([u]) * f_*([v])$$

$$f_*([u]*[v]) = f_*([u\cdot v]) = [f\circ(u\cdot v)],$$
$$f_*([u]) * f_*([v]) = [f\circ u] * [f\circ v] = [(f\circ u)\cdot(f\circ v)],$$
али важи да је $f\circ(u\cdot v) = (f\circ u)\cdot(f\circ v)$, одакле једнакост директно следи. ∎

Пример Нека је $c:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ константно пресликавање, тј.
$$c(x) = y_0, \quad x\in X$$
Тада је c_* тривијалан хомо. Заиста, за $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ имамо
$$c_*([u]) = [c\circ u] = [c_{y_0}] = 0$$
0 је ознака за неутрал у $\pi_1(X,x_0)$

($c_{y_0}: I\to Y$ константна петља у y_0)

Користимо и ознаку $c_* = 0$ (овде 0 значи тривијалан хомоморфизам).

Пример Ако је $\mathbb{1}_X:(X,x_0)\to(X,x_0)$ идентичко пресл. (тј. $\mathbb{1}_X(x)=x$, $x\in X$) онда је $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Заиста, за $[u]\in\pi_1(X,x_0)$ је
$$(\mathbb{1}_X)_*([u]) = [\mathbb{1}_X\circ u] = [u] = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}([u]).$$

Став $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$

Став Нека су $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ и $f\simeq g$ (rel $\{x_0\}$).
Онда је $f_* = g_*$.

деф. Простори (X,x_0) и (Y,y_0) су хомотопски еквивалентни као простори са базном тачком ако постоје

$$\varphi:(X,x_0)\to(Y,y_0) \quad и \quad \psi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$$

тј. $\varphi\circ\psi \simeq 1_Y \ (\mathrm{rel}\ \{y_0\})$ и $\psi\circ\varphi \simeq 1_X \ (\mathrm{rel}\ \{x_0\})$.
Пишемо $(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$.

Став Ако је $(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$, онда је $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$.

доказ:

$$(X,x_0) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} (Y,y_0)$$

Имамо $\varphi\circ\psi \simeq 1_Y \ (\mathrm{rel}\ \{y_0\})$ и $\psi\circ\varphi \simeq 1_X \ (\mathrm{rel}\ \{x_0\})$, па је на основу претходног става

$$(\varphi\circ\psi)_* = 1_{\pi_1(Y,y_0)} \quad и \quad (\psi\circ\varphi)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$$

тј. $$\varphi_*\circ\psi_* = 1_{\pi_1(Y,y_0)} \quad и \quad \psi_*\circ\varphi_* = 1_{\pi_1(X,x_0)},$$

па су φ_* и ψ_* једно другом инверзни, тј.

$$\varphi_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0) \text{ је изоморфизам. } \blacksquare$$

Теорема Ако је X путно повезан, онда за све $x_0,x_1\in X$ важи $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$.

Дакле, кад је X путно повезан, π_1 не зависи од избора базне тачке, па уместо $\pi_1(X,x_0)$ пишемо краће $\pi_1(X)$.

Теорема Ако је $f: X \to Y$ хомотопски тривијално, онда је за свако $x \in X$, $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ тривијалан хомоморфизам.

Теорема Ако је $f: X \to Y$ хомотопска еквиваленција, онда је за свако $x \in X$, $f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ изоморфизам.

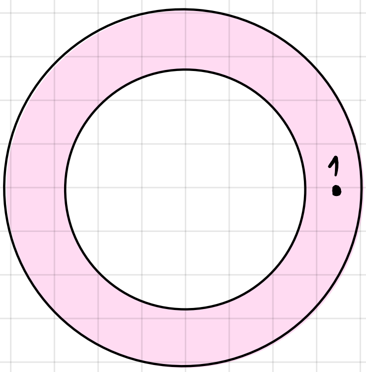
Последица Нека су X и Y путно повезани. Тада
$$X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y).$$

Пример Видели смо раније да су $\mathbb{R}^n, D^n, \operatorname{int} D^n$ контрактибилни, тј. $\mathbb{R}^n \simeq *$, $D^n \simeq *$, $\operatorname{int} D^n \simeq *$ и $\pi_1(*) = 0$ ($*$ је топ. пр. са једном тачком), па на основу претходне последице имамо $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, $\pi_1(D^n) = 0$, $\pi_1(\operatorname{int} D^n) = 0$.

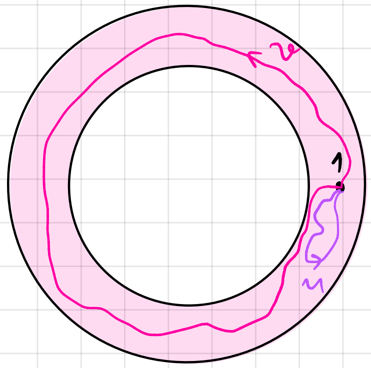
Теорема $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Доказ претходне теореме је захтевнији, али интуиција лежи у једноставној идеји.
Нека је $1 \in S^1$ базна тачка и замислимо S^1 као „задебљану" кружницу, тј. као кружни прстен

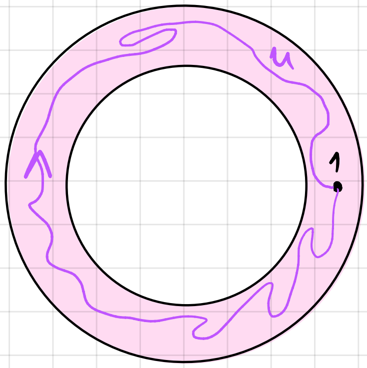
S^1:

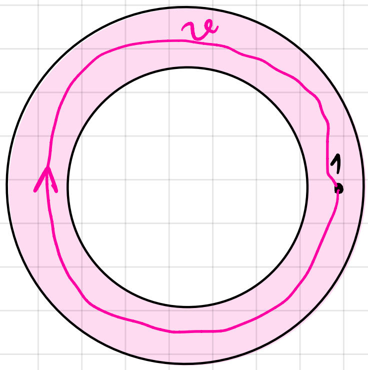


Елементи $\pi_1(S^1)$ су класе петљи у S^1:



Петље у S^1 се разликују по томе колико су пута намотане (и у ком смеру) око S^1. Ако су две петље намотане исти број пута, онда су оне међусобно хомотопне, нпр. $u \simeq v$ јер су обе намотане једном у истом смеру (кад „затегнемо" и добијемо v, па је $u \simeq v$), тј. обе ове петље представљају исти ел. у $\pi_1(S^1)$,





тј. $[u]=[v]$. Због тога има смисла дефинисати:

$$\varphi : \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$[u] \longmapsto k_u$$

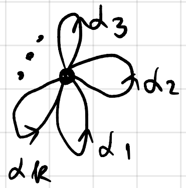
где је k_u број намотаја петље u око S^1 ($k_u > 0$ ако је смер намотавања позитиван, а $k_u < 0$, ако је смер негативан). И обрнуто, свакомl $k \in \mathbb{Z}$ додељујемо $[u]$, где је u петља намотана k пута око S^1.

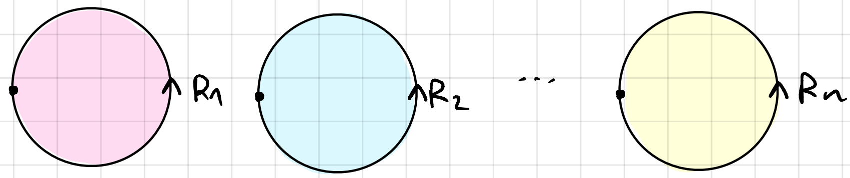
Пресликавање φ је управо један изоморфизам, па је

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Рачунање неких фундаменталних група

Теорема Нека је X тополошки простор добијен лепљењем букета k кружница на границе n дискова по „правилима" $R_1, R_2, \dots, R_n$, тј. X има модел

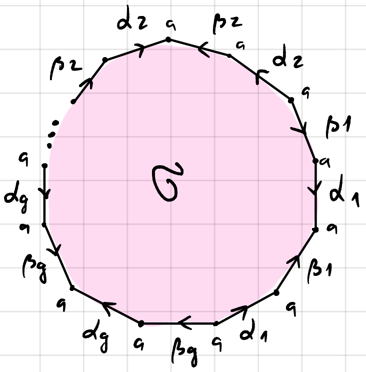
X : 



онда је

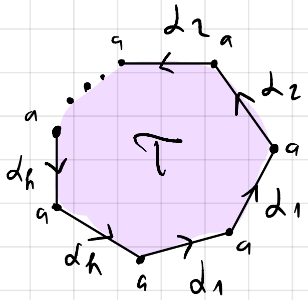
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle$$

(Видети у белешкама са вежби ОТ представљање групе преко генератора и релације стр. 69-74)

M_g : 

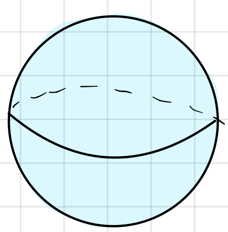
$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

посл. $\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

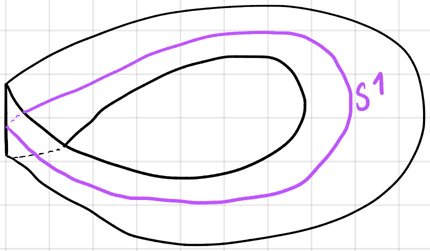
N_h : 

$$\pi_1(N_h) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$$

посл. $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

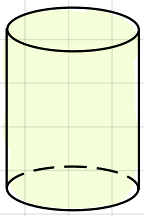
S^n : 

$$\pi_1(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

M: 

Мебијусова трака је хомотопски еквивалентна централној кружници $M \simeq S^1$

$$\Rightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

C: 

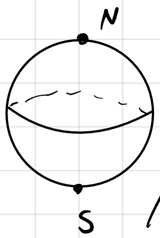
$$C \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(C) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

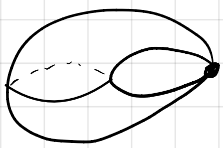
Став Када је букет $X \vee Y$ „довољно леп" (а код нас ће увек бити), онда је

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$$

($*$ је слободан производ група, видети у белешкама са вежби из ОТ, стр. 73)

Пример $X = S^2/_{N\sim S}$ = уштинута сфера

$X =$ 

$/_{N\sim S} \simeq$  $\simeq S^1 \vee S^2$

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(S^1 \vee S^2) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z} * 0 \cong \mathbb{Z}$$

Пример $\pi_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{k} \vee \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{\ell}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k} * \underbrace{0 * \cdots * 0}_{\ell} \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k}$