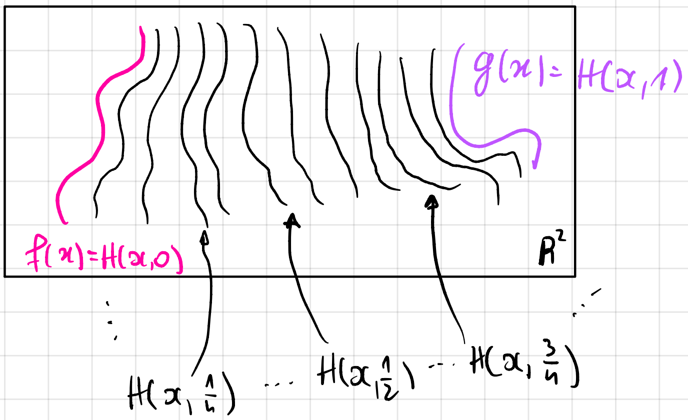
II Хомотопија

деф. Нека су $f, g : X \to Y$ непр. пресликавања. Кажемо да је f **хомотопно** са g ако постоји непр. пресликавање $H : X \times I \to Y$ (где је $I = [0,1]$) тд.

$$H(x,0) = f(x) \quad \text{и} \quad H(x,1) = g(x),$$

за свако $x \in X$. Пресликавање H називамо **хомотопијом** између f и g и пишемо $f \simeq g$ или $H : f \simeq g$.

Пример H је „непрекидна трансформација f у g". То се најбоље види кад су f и g путеви.
Нпр. $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ (тј. $X = I$, $Y = \mathbb{R}^2$) и $H : f \simeq g$, тј. $H : I \times I \to \mathbb{R}^2$.



Означимо са $C(X,Y)$ скуп свих непрекидних функција из X у Y.

Став $\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$.

доказ: (Р) За $f : X \to Y$ нека је $H(x,t) := f(x)$. Тада $H : f \simeq f$

(С) Нека је $H : f \simeq g$. Дефинишемо $F : X \times I \to Y$ са

$$F(x,t) = H(x, 1-t).$$

$$\left.\begin{aligned} F(x,0) &= H(x,1) = g(x) \\ F(x,1) &= H(x,0) = f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow g \simeq f$$

(Т) Нека је $H: f \simeq g$ и $F: g \simeq h$, $f, g, h: X \to Y$. Дефинишемо $G: X \times I \to Y$ са
$$G(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
Тада $G: f \simeq h$ ■

Став Нека су $f, g: X \to Y$ непр. и $f \simeq g$.

(1) Ако је $\varphi: Y \to Z$ непр., онда $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$.

(2) Ако је $\psi: W \to X$ непр., онда $f \circ \psi \simeq g \circ \psi$.

доказ: (1) $H: f \simeq g \Rightarrow \varphi \circ H: \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$

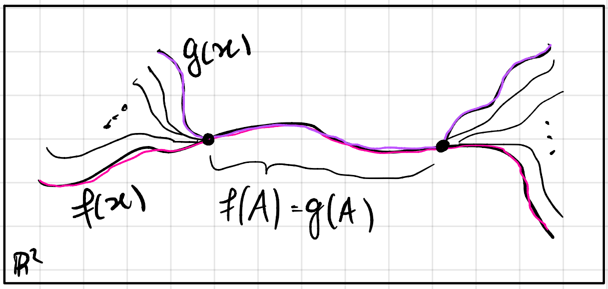
(2) $H: f \simeq g \Rightarrow$ дефинишемо $G: W \times I \to Y$ са
$G(w,t) = H(\psi(w), t) \Rightarrow G: f \circ \psi \simeq g \circ \psi$. ■

Пример Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан и $f, g: X \to K$ непр. онда $f \simeq g$. Специјално за $K = \mathbb{R}^n$,
$$f, g: X \to \mathbb{R}^n \text{ непр.} \Rightarrow f \simeq g.$$

деф. Нека су $f, g: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$. Кажемо да је **f хомотопно са g релативно A** (пишемо $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$) ако постоји непр. $H: X \times I \to Y$ т.д.
$$H(x,0) = f(x), \quad x \in X$$
$$H(x,1) = g(x), \quad x \in X$$
$$H(a,t) = f(a) = g(a), \quad a \in A, \ t \in I$$

Другим речима, $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\, A)$ ако је $f \simeq g$ и при тој хомотопији се слика од A „не помера".

Пример $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, $\quad A = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$



Став $\simeq (\mathrm{rel}\ A)$ је рел. екв.

Став (1) $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A) \Rightarrow \varphi \circ f \simeq \varphi \circ g \ (\mathrm{rel}\ A)$

(2) $\psi : W \to X$ и $B \subseteq W$ тд. $\psi(B) \subseteq A$, онда

$$f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ A) \Rightarrow f \circ \psi \simeq g \circ \psi \ (\mathrm{rel}\ B)$$

деф. Константно пресликавање $X \to Y$ које све слика у $y \in Y$ означавамо са $c_y : X \to Y$, тј. $c_y(x) = y$, за свако $x \in X$

деф. Пресликавање $f : X \to Y$ је хомотопски тривијално ако постоји $y \in Y$ тд. $f \simeq c_y$. Пишемо $f \simeq const$.

Пример Ако је $f : X \to \mathbb{R}^n$, онда $f \simeq const$.

деф. Кажемо да су топ. простори X и Y хомотопски еквивалентни ако постоје $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ непр. тд. $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y$ и $\psi \circ \varphi \simeq 1_X$. Пишемо $X \simeq Y$

Очигледно $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Став $\simeq$ је рел. екв.

Пример $\mathbb{R}^n \setminus * \simeq S^{n-1}$ ($*$ = било која тачка у $\mathbb{R}^n$)

деф. Кажемо да је X контрактибилан ако је $X \simeq *$.
($*$ = топ. пр. који се састоји од само једне тачке)

Пример (1) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан $\Rightarrow$ $K \simeq *$

(2) $D^n \simeq *$ (диск димензије n), $n \geq 1$

(3) $\mathbb{R}^n \simeq *$

(4) $S^n \not\simeq *$

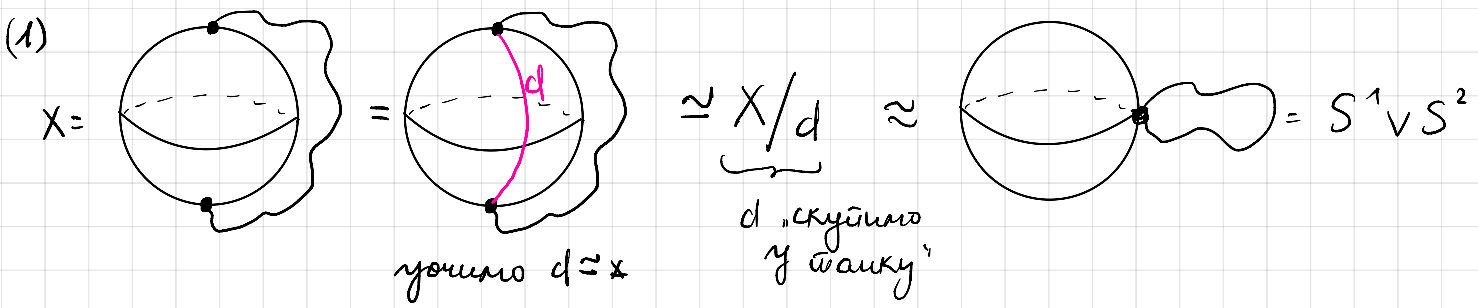
Став Ако је X топ. пр. и $A \subseteq X$ тд. пар (X, A) задовољава својство проширења хомотопије и ако је $A \simeq *$, онда $X \simeq X/A$.

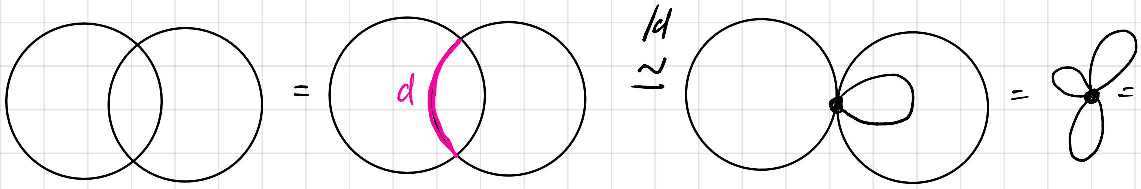
Коментар Нисмо дефинисали својство проширења хомотопије, али сви простори са којима радимо ће имати то својство, па само памтимо:

$$A \simeq * \Rightarrow X \simeq X/A$$

Пример Претходни став користимо често за $A = D^1 =$ дуж и $A = D^2 =$ диск

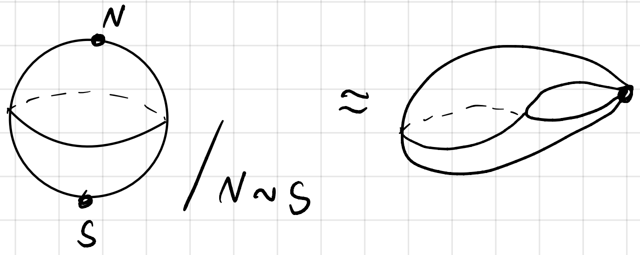
(1)



(2) $X =$ 

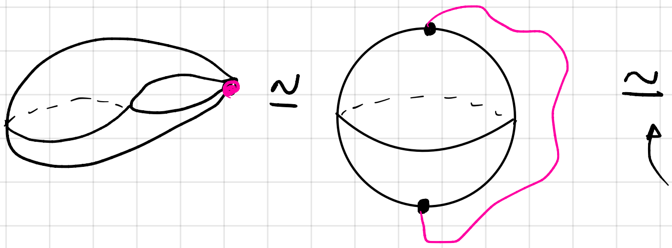
$= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

(3) $X = S^2/_{N\sim S}$ – на сфери идентификујемо северни и јужни пол.

$X =$ 

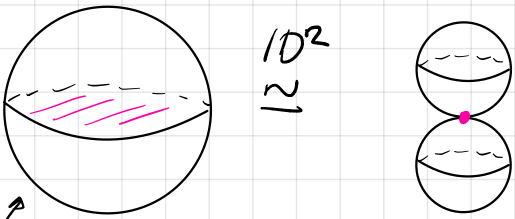
Став користимо на два начина:

- D^1 и D^2 скупљамо у $*$
- $*$ ширимо до D^1 или D^2

$X \approx$  $\simeq S^1 \vee S^2$

пример (1)

Простор X се зове уштинута сфера.

(4) $X =$ 

$\approx S^2 \vee S^2$

сфера са диском по средини