I Основни појмови у топологији

деф. Нека је $X \neq \emptyset$ скуп, $\mathcal{P}(X)$ партитивни скуп од X (тј. скуп свих подскупова од X) и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова т.д.

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(2) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$,

(3) $U_\alpha \in \mathcal{T},\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

Тада $\mathcal{T}$ називамо топологијом на X, а пар $(X, \mathcal{T})$ тополошким простором. Елементе фамилије $\mathcal{T}$ називамо отвореним скуповима.

- Често пишемо и само т. пр. X уместо $(X, \mathcal{T})$
- Индукцијом из (2): $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Пример (1) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, X\}$ антидискретна топологија

(2) $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ дискретна топологија

(3) (M, d) метрички простор

$\mathcal{T} = \{U \subseteq M \mid U \text{ отворен у } (M, d)\}$

топ. индукована метриком

(4) $(\mathbb{R}^n, d)$ d - стандардна метрика

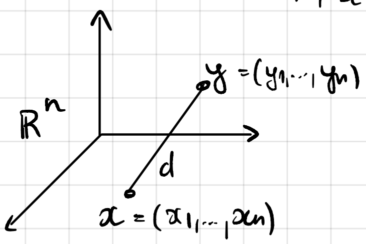
уобичајена (стандардна) топологија

(5) $X = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$

На овом курсу ћемо углавном разматрати „лепе" тополошке просторе, тј. подскупове од $\mathbb{R}^n$ са стандардном топологијом (наслеђеном од стандардне метрике).

Пример Желимо да видимо како изгледа стандардна топ. $\mathcal{U}$ на $\mathbb{R}^n$ наслеђена од метрике d дате са

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$



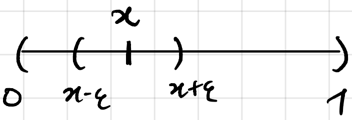
„како изгледа $\mathcal{U}$" = "шта су отворени скупови у $(\mathbb{R}^n, \mathcal{U})$"

$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < r \}$ – отворена кугла са центром у x полупречника r

$U \in \mathcal{U}$ тј. U је отворен акко:

$$(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0) \ B(x,\varepsilon) \subseteq U$$

нпр. • $(0,1)$ је отворен у $\mathbb{R}$ јер за $x \in (0,1)$ узмемо $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$ па је $B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,1)$

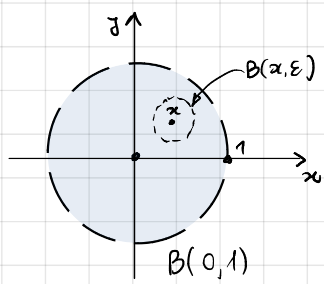


• $[0,1)$ није отворен јер за $x=0$ не можемо наћи ε, тј.

$$(\forall \varepsilon > 0) \ B(0,\varepsilon) \not\subseteq [0,1)$$

• $(0,1) \cup (3,5)$, $(-\infty, 8)$, $(-\infty, +\infty)$ су отворени у $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$

• $B(0,1)$ је отворен у $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$:



деф. Кажемо да је скуп $F \subseteq X$ затворен у $(X, \mathcal{T})$ ако је $F^c \in \mathcal{T}$. Фамилију свих затворених скупова означавамо са $\mathcal{F}$, тј. $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid F^c \in \mathcal{T}\}$.

Теорема Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. и $\mathcal{F}$ фамилија затворених скупова. Тада

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,

(2) $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cup G \in \mathcal{F}$,

(3) $F_\alpha \in \mathcal{F},\ \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

доказ: Де-Морганови закони + деф. $\mathcal{F}$. $\boxtimes$

Пример (1) $[0,1]$, $[0,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $\{3\}$, $[4,5] \cup [7,8]$ су затворени у $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

(2) $[0,1)$ није ни отворен ни затворен

(3) $\emptyset$ и $\mathbb{R}$ су и отворени и затворени

деф. Нека је $(X, \mathcal{T})$ топ. пр. Скуп G је околина тачке $x \in X$ ако

$$(\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq G$$

Околински систем: $\mathcal{O}(x) := \{G \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T})\ x \in U \subseteq G\}$

Ако $G \in \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{T}$, G је отворена околина.

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in A$ унутрашња тачка од A ако је $A \in \mathcal{O}(x)$. Унутрашњост (интериор) скупа A је скуп свих унутрашњих тачака:

$$\operatorname{int} A = \{x \in A \mid A \in \mathcal{O}(x)\}$$

особине: (1) $\operatorname{int} A \subseteq A$

(2) $\operatorname{int} A \in \mathcal{T}$

(3) $\operatorname{int} A = A \iff A \in \mathcal{T}$

(4) $B \subseteq A,\ B \in \mathcal{T} \Rightarrow B \subseteq \operatorname{int} A$

(5) $\operatorname{int} A = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$

Другим речима, int A је највећи отворени скуп садржан у A.

деф. Нека је $A \subseteq X$. Кажемо да је $x \in X$ адхерентна тачка скупа A ако $(\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset$. Затворење (адхеренција) скупа A је скуп свих адх. тачака:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid (\forall G \in \mathcal{O}(x))\ G \cap A \neq \emptyset\}$$

(користи се и ознака $\operatorname{cl} A$)

особине: (1) $A \subseteq \bar{A}$

(2) $\bar{A} \in \mathcal{F}$

(3) $A = \bar{A} \iff A \in \mathcal{F}$

(4) $A \subseteq F \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \subseteq F$

(5) $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \in \mathcal{F}}} F$

Другим речима, $\bar{A}$ је најмањи затворен скуп који садржи A.

деф. Граница (руб) скупа $A \subseteq X$ је $\partial A \overset{\text{def}}{=} \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$.

особине: (1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$

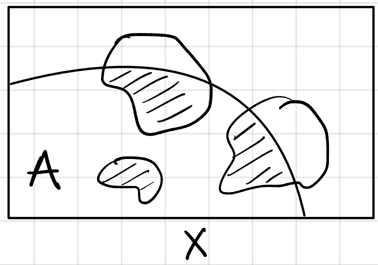
(2) $\bar{A} = \operatorname{int} A \sqcup \partial A$

Пример Сви подскупови су у $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$

A	$(0,1)$	$[0,1)$	$[0,1]$	$(-\infty,3)$	$(1,2)\cup\{3\}$	$(0,1)\cup(1,2)$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{int} A$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,1)$	$(-\infty,3)$	$(1,2)$	$(0,1)\cup(1,2)$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$
$\bar{A}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$	$(-\infty,3]$	$[1,2]\cup\{3\}$	$[0,2]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
∂A	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{0,1,2\}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$

Нека је $(X,\mathcal{T})$ т. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо

$$\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$



Став $(A, \mathcal{T}_A)$ је тополошки простор.

доказ: по деф. ▨

деф Топологију $\mathcal{T}_A$ називамо релативном топ. или топологијом наслеђеном од простора X и кажемо да је $(A,\mathcal{T}_A)$ потпростор од $(X,\mathcal{T})$.

Став $\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$

доказ: $G \in \mathcal{F}_A \iff (\exists U \in \mathcal{T})\ G = A \setminus U$

$\iff (\exists U \in \mathcal{T})\ G = A \setminus (U \cap A) = A \cap (U \cap A)^c = A \cap (U^c \cup A^c)$

$= (A \cap U^c) \cup (A \cap A^c) = A \cap U^c$

$\iff (\exists F \in \mathcal{F})\ G = A \cap F$ ▨

деф Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y,\mathcal{T}_Y)$ топ. пр. Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако $(\forall V \in \mathcal{T}_Y)\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

деф Пресликавање $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ је непр. у тачки $x_0\in X$ ако $(\forall V\in\mathcal{O}(f(x_0)))\ f^{-1}(V)\in\mathcal{O}(x_0)$.

Теорема Нека је $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$. Следећи искази су еквивалентни:

(1) f је непр.

(2) $(\forall x\in X)$ f је непр. у x.

(3) $(\forall F\in\mathcal{F}_Y)\ f^{-1}(F)\in\mathcal{F}_X$.

(4) $(\forall A\subseteq X)\ f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

(5) $(\forall B\subseteq Y)\ \overline{f^{-1}(B)}\subseteq f^{-1}(\overline{B})$

Став Ако су $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ непр., онда је и $g\circ f:X\to Z$ такође непрекидно.

доказ Нека је $W\in\mathcal{T}_Z$

$$(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\in\mathcal{T}_Y \text{ јер је } g \text{ непр.}}\big)\in\mathcal{T}_X \text{ јер је } f \text{ непр.}$$

$\Rightarrow g\circ f$ је непр. $\blacksquare$

Став Ако је $f:X\to Y$ непр. и $A\subseteq X$, онда је $f|_A:A\to Y$ непр.

Теорема [о лепљењу] Нека су X, Y топ., $A_\alpha\subseteq X$, $\alpha\in\mathcal{A}$, $X=\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}A_\alpha$. Нека је $f:X\to Y$ тд. $f_\alpha:=f|_{A_\alpha}:A_\alpha\to Y$ непр. $\alpha\in\mathcal{A}$.

(1) $(\forall\alpha\in\mathcal{A})\ A_\alpha\in\mathcal{T}_X\Rightarrow f$ је непр.

(2) $\mathcal{A}$ коначан и $(\forall\alpha\in\mathcal{A})\ A_\alpha\in\mathcal{F}_X\Rightarrow f$ је непр.

деф. Кажемо да је $h: X \to Y$ хомеоморфизам ако је h бијекција и h и h^{-1} су непр.
Ако постоји хомео. између X и Y пишемо $X \approx Y$.

Став $\approx$ је рел. еквиваленције.

доказ (Р) $\mathbb{1}: (X, \mathcal{T}_X) \to (X, \mathcal{T}_X)$ је хомео. $\Rightarrow X \approx X$

(С) $X \approx Y \Leftrightarrow h: X \xrightarrow{\approx} Y \Leftrightarrow h^{-1}: Y \xrightarrow{\approx} X \Leftrightarrow Y \approx X$

(Т) Нека је $h_1: X \xrightarrow{\approx} Y$ и $h_2: Y \xrightarrow{\approx} Z$. Онда је $h_2 \circ h_1: X \to Z$ такође хомео. па је $X \approx Z$. $\blacksquare$

Користимо и ознаке: $X \overset{h}{\approx} Y$ и $h: X \approx Y$ за $h: X \to Y$ хомео.

Пример (1) $(0,1) \approx (a,b)$ (за произвољно $a<b$)

$h: (0,1) \to (a,b)$, $h(x) = a + x(b-a)$ непр.

$h^{-1}: (a,b) \to (0,1)$, $h^{-1}(y) = \dfrac{y-a}{b-a}$ непр.

$\Rightarrow h: (0,1) \xrightarrow{\approx} (a,b)$

(2) Слично $(0,1] \approx (a,b]$, $[0,1) \approx [a,b)$, $[0,1] \approx [a,b]$

(3) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \mathbb{R}$

$h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{tg} x$ непр.

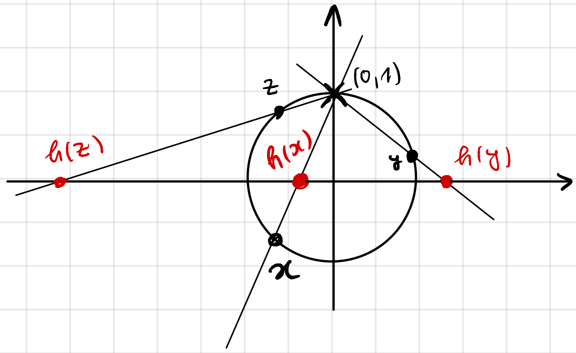
$h^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $h^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ непр.

(4) Из (1) и (3) следи $(0,1) \approx \mathbb{R}$

(5) $S^1 \setminus * \approx \mathbb{R}$

S^1 = јединична кружница у равни

$*$ = произвољна тачка на S^1



буо. $* = (0,1)$

стереографске пројекције: тачка $x \in S^1 \setminus \{(0,1)\}$ се слика у пресек x-осе и праве кроз x и $(0,1)$

Прецизније, $h(x,y) = \left(\frac{x}{1-y}, 0\right) \in \mathbb{R} \times \{0\} \approx \mathbb{R}$, тј. $h: S^1 \setminus * \to \mathbb{R}$

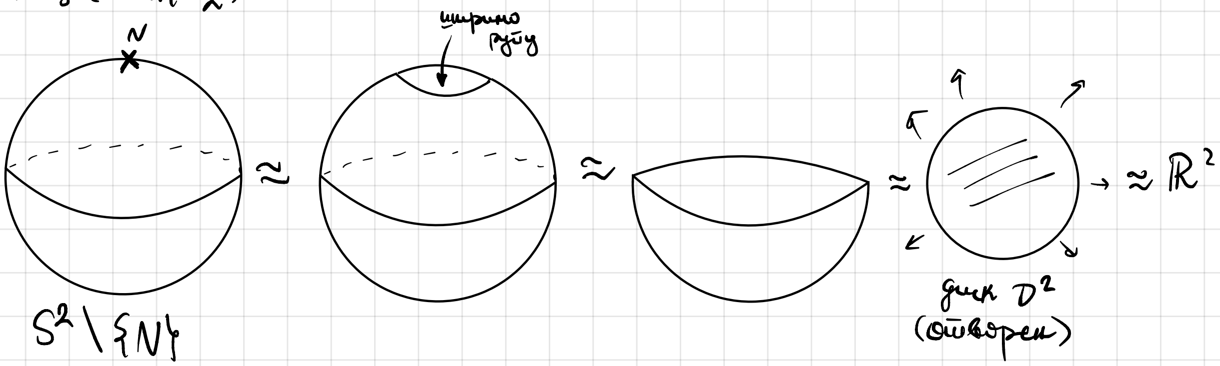
тачка на x-оси

$$h^{-1}(\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{t}}) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right), \quad h^{-1}: \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{(0,1)\}.$$

$\Rightarrow \quad h: S^1 \setminus * \approx \mathbb{R}.$

(6) Претходни пример се може уопштити: $S^n \setminus * \approx \mathbb{R}^n$

Нпр. за $n=2$:



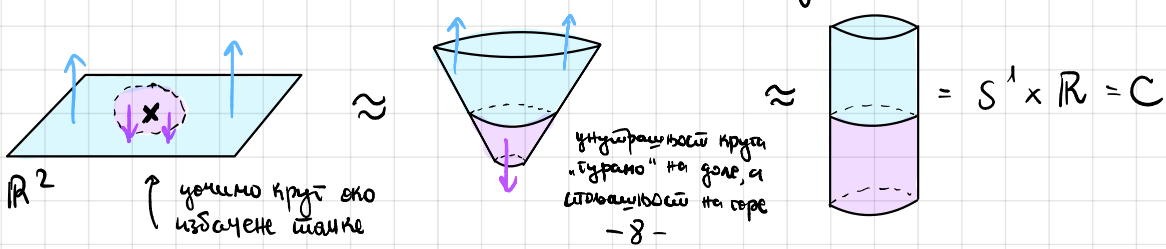
(7) Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$. Означимо са Γ_f график од f, тј.

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тада је $\Gamma_f \approx X$. Хомеоморфизам $h: \Gamma_f \to X$ је дат са

$$h(x, f(x)) := x.$$

(8) $\mathbb{R}^2 \setminus * \approx C \quad (C = S^1 \times \mathbb{R}$ - цилиндар$)$



(9) $\operatorname{int} D^2 \approx \mathbb{R}^2$

(10) $\operatorname{int} D^n \approx \mathbb{R}^n$ $\quad (D^n =$

подсетник:

$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ – јединични диск димензије n

$\operatorname{int} D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ – отворени диск димензије n

$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$ – јединична сфера

притом: $S^n = \partial D^n$ и $D^n = \operatorname{int} D^n \sqcup S^n$.

Компактност

деф Нека је $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од X. Кажемо да је $\mathcal{U}$ покривач од X ако је $X = \bigcup \mathcal{U}$. Ако је додатно $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ отворен покривач.

Ако су $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ два покривача од X т.д. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$, кажемо да је $\mathcal{U}_1$ потпокривач од $\mathcal{U}_2$.

деф Простор X је компактан ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач. Прецизније, за сваку фамилију $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отворених скупова важи

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow (\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A) \; X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}.$$

деф Нека је $A \subseteq X$. Фамилија $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ је покривач скупа A ако је $A = \bigcup \mathcal{U}$, а ако је додатно $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$, онда је $\mathcal{U}$ отворен покривач.

деф. $A \subseteq X$ је компактан у X ако сваки отворен покривач од A има коначан потпокривач.

Став Нека је $A \subseteq X$. A је компактан скуп у X акко је $(A, \mathcal{T}_A)$ компактан као топ. простор.

Став Нека је X компактан и $f: X \to Y$ непрекидно и „на". Тада је и Y компактан.

доказ: Нека је $Y = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha \in \mathcal{T}_Y$, $\alpha \in A$.

Тада $X = \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{f^{-1}(V_\alpha)}_{\in \mathcal{T}_X} \xRightarrow{X \text{ комп.}} (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A)\ X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$

$\Rightarrow Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \Rightarrow Y$ је компактан. $\blacksquare$

Последица Компактност је тополошка инваријанта.

Последица Ако је $f: X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ компактан, онда је и $f(A)$ компактан.

доказ: Применимо став на $f|_A : A \to f(A)$. $\blacksquare$

деф Фамилију свих компактних подскупова од X означавамо са $\mathcal{K}_X$.

Став Ако је X компактан, онда $\mathcal{F}_X \subseteq \mathcal{K}_X$.

(Затворен подскуп компакта је компактан.)

Пример (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ није компактан: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ – нема коначан потпокривач

(2) X коначан $\Rightarrow X$ је компактан

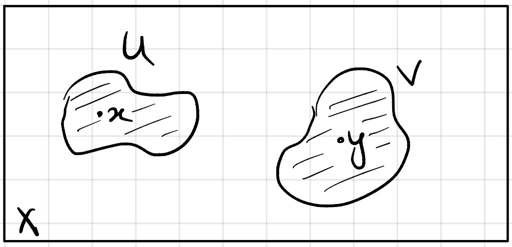
Заиста, X је коначан, па је и $\mathcal{P}(X)$ коначан, а тим пре и $\mathcal{T}_X$. То значи да је сваки отворен покривач већ коначан, па је сам себи коначан потпокривач, те је X компактан.

Став У $\mathbb{R}^n$ скуп је компактан акко је затворен и ограничен.

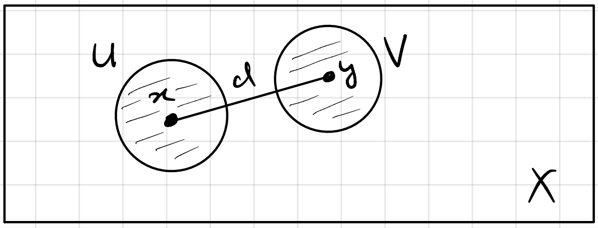
Пример $[0,1]$, $[3,5]\cup[7,8]$ су компактни у $\mathbb{R}$
$(0,1)$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $[0,1)$ нису компактни у $\mathbb{R}$

Хауздорфови простори

деф Кажемо да је X **Хауздорфов простор** (или T_2-простор) ако $(\forall x,y\in X)\ x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\mathcal{T})\ x\in U,\ y\in V,\ U\cap V=\emptyset$.
Дакле, у Хауздорфовом простору сваке две различите тачке можемо раздвојити отвореним скуповима.



Пример Сваки метрички простор је Хауздорфов. Заиста, нека је $x\neq y$ и $d=d(x,y)$. Онда узмемо $U=B(x,\frac{d}{3})$, $V=(y,\frac{d}{3})$

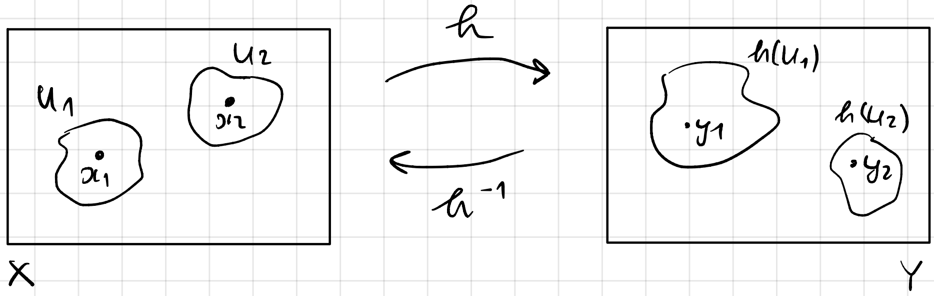


Став Својство T_2 је тополошка инваријанта.
<u>доказ</u> Нека је X T_2 и $h: X\to Y$ хомеоморфизам.
Нека су $y_1,y_2\in Y$, $y_1\neq y_2$ и $x_1=h^{-1}(y_1)$, $x_2=h^{-1}(y_2)$.
X је T_2 па раздвојимо x_1 и x_2 у X:

$(\exists U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X)\ x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset.$

Тада $h(U_1), h(U_2) \in \mathcal{T}_Y$ и раздвајају y_1 и y_2:

$$y_1 \in h(U_1),\quad y_2 \in h(U_2),\quad h(U_1) \cap h(U_2) = \emptyset.$$



Став Потпростор T_2 простора је T_2.

Став Ако је X T_2, онда $\mathcal{K}_X \subseteq \mathcal{F}_X$

Последица Ако је X компактан и T_2, онда $\mathcal{K}_X = \mathcal{F}_X$.

Став Ако је $f: X \to Y$ непрекидна бијекција, X компактан, Y T_2, онда је f хомеоморфизам.

Повезаност

деф. Топ. пр. $(X, \mathcal{T}_X)$ је повезан ако не постоји пар скупова $U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\emptyset\}$ тд. $U \cap V = \emptyset$ и $U \cup V = X$.

Ако постоје овакви скупови, кажемо да је X неповезан, а пар (U,V) називамо дисконекцијом од X.

Ако је (U,V) дисконекција од X, онда су U и V и отворени и затворени.

Пример (1) $X = [0,1] \cup [3,5]$ је неповезан

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ је повезан

(3) $(X, \mathcal{T}_d)$ је повезан акко $|X| = 1$.

Став Следећа тврђења су еквивалентна:

(1) X је повезан;

(2) не постоји непр. и „на" $f:(X,\mathcal{T}_X)\to(\{0,1\},\mathcal{T}_d)$;

(3) $\mathcal{T}\cap\mathcal{F}=\{\emptyset, X\}$.

<u>Доказ</u> <u>(1) ⇒ (3):</u> пп. $(\exists U\in(\mathcal{T}\cap\mathcal{F})\setminus\{\emptyset,X\})$

$\Rightarrow (U,U^c)$ је дисконекција од X ↯

<u>(3) ⇒ (1):</u> пп. X није повезан и (U,V) нека дисконекција, тј. $U,V\in\mathcal{T}_X\setminus\{\emptyset\}$, $U\cap V=\emptyset$, $U\cup V=X$.

$\Rightarrow U=V^c\in\mathcal{F}_X \Rightarrow U\in\mathcal{T}_X\cap\mathcal{F}_X$ ↯

<u>(1) ⇒ (2):</u> пп. $\exists f: X\to\{0,1\}$ непр. и „на"

$U:=f^{-1}(\{0\})\in\mathcal{T}_X\setminus\{\emptyset\}$ (јер $\{0\}\in\mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и f непр.)

$V:=f^{-1}(\{1\})\in\mathcal{T}_X\setminus\{\emptyset\}$ (јер $\{1\}\in\mathcal{T}_{\{0,1\}}$ и f непр.)

$\Rightarrow (U,V)$ је дисконекција од X ↯

<u>(2) ⇒ (1):</u> пп. (U,V) дисконекција од X.

Дефинишемо $f|_U=0$, $f|_V=1$.

f је непр. на основу теореме о лепљењу. ↯ ▨

Пример $\mathbb{Q}$ је неповезан. Једна дисконекција би била:

$$\mathbb{Q}=\left(\mathbb{Q}\cap(-\infty,\sqrt{2})\right)\sqcup\left(\mathbb{Q}\cap(\sqrt{2},+\infty)\right)$$

Став Ако је X повезан и $f:X\to Y$ непр. и „на", онда је и Y повезан.

Последица Ако је $f:X\to Y$ непр. и $A\subseteq X$ повезан, онда је и $f(A)$ повезан.

Пример (1) Сви интервали су повезани:

$$(0,1),\ [0,1],\ [0,1),\ (-\infty,1],\ (-\infty,1),\ [1,+\infty),\ (1,+\infty)$$

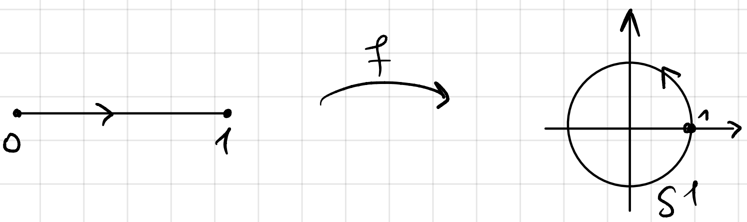
(2) Кружница S^1 је повезана.

Заиста, кружницу можемо видети као слику при пресликавању

$$f: [0,1] \xrightarrow{\text{"на"}} S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$$

датом са

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



Знамо да је слика повезаног скупа при непр. пресликавању повезана, па је $f([0,1]) = S^1$ повезан.

Дефинишимо релацију $\sim$ на топ. пр. X:

$$x \sim y \overset{def}{\iff} (\exists A \subseteq X)\ x,y \in A \text{ и } A \text{ је повезан.}$$

Став $\sim$ је релација еквиваленције.

деф. Класе еквиваленције релације $\sim$ називамо компонентама повезаности. Класу тачке $x \in X$ означавамо са C_x.

Пример (1) $\mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$ има 4 компоненте повезаности:

$$C_0 = (-\infty,1),\quad C_{\frac{1}{2}} = (1,2),\quad C_{\frac{5}{2}} = (2,3) \text{ и } C_{17} = (3,+\infty)$$

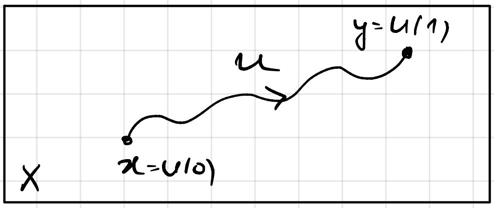
(2) $\mathbb{R}$ има 1 компоненту повезаности (јер је повезан)

Надаље користимо ознаку $I = [0,1]$.

деф. Пут у простору X је непрекидно пресликавање $u : I \to X$. Тачка $u(0)$ је почетак, а $u(1)$ крај пута u.

деф. Простор X је путно повезан ако су сваке две тачке из X спојене путем, тј.

$$(\forall x,y \in X)\,(\exists u : I \to X \text{ непр.})\ u(0)=x,\ u(1)=y.$$



Став Ако је X путно повезан и $f : X \to Y$ непр. и „на“, онда је и Y путно повезан.

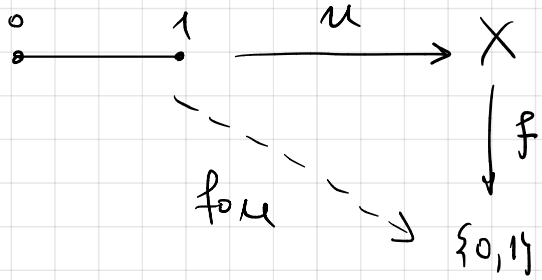
Последица Ако је $f : X \to Y$ непр. и $A \subseteq X$ путно повезан, онда је и $f(A)$ путно повезан.

Став X путно повезан $\Rightarrow$ X повезан.

доказ ПТС. Нека је $f : X \to \{0,1\}$ непр. тд.

$$(\exists x,y \in X)\quad f(x)=0,\ f(y)=1$$

Нека је $u : [0,1] \to X$ пут од x до y, тј. $u(0)=x,\ u(1)=y$.



$f \circ u$ је непр. и „на“
$[0,1]$ је пов. $\Rightarrow$ $\{0,1\}$ је повезан ↯ ■

Пример X повезан $\not\Rightarrow$ путно повезан

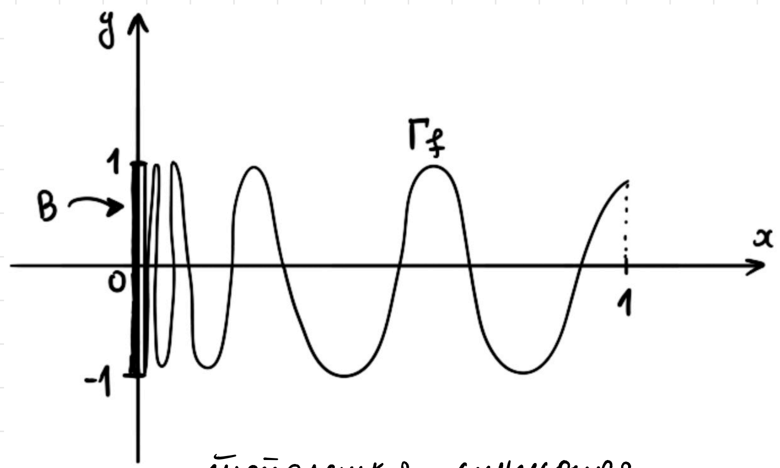
Нека је $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ дато са $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ и

$\Gamma_f=\{(x,f(x)) \mid x\in(0,1]\}$ графикон ове функције.

Γ_f је путно повезан $\Rightarrow$ Γ_f је повезан $\Rightarrow$ $X:=\overline{\Gamma_f}$ је повезан

Није тешко видети да је

$$X=\underbrace{(\{0\}\times[-1,1])}_{\overset{!!}{B}}\cup\Gamma_f$$



тополошка синусоида

X није путно повезан јер тачке са B не можемо спојити путем са тачкама са Γ_f.

Тополошки производ

Нека су $(X,\mathcal{T}_X)$ и $(Y,\mathcal{T}_Y)$ топ. пр.

$$\mathcal{T}_{X\times Y}\overset{\text{def}}{=}\{W\subseteq X\times Y \mid (\forall (x,y)\in W)(\exists U\in\mathcal{T}_X)(\exists V\in\mathcal{T}_Y)\ (x,y)\in U\times V\subseteq W\}$$

$$=\{\bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha\times V_\alpha) \mid (\forall\alpha\in A)\ U_\alpha\in\mathcal{T}_X,\ V_\alpha\in\mathcal{T}_Y\}$$

Став $\mathcal{T}_{X\times Y}$ је једна топологија на $X\times Y$.

деф. Топ. пр. $(X\times Y,\mathcal{T}_{X\times Y})$ је тополошки производ простора X и Y, а $\mathcal{T}_{X\times Y}$ називамо топологијом производа или Тихоновљевом топологијом.

Став Пројекције $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ дате са

$$p_X(x,y) := x, \quad p_Y(x,y) := y$$

су непрекидне и отворене.

Став $f : Z \to X \times Y$ је непр. акко су непр. $p_X \circ f$ и $p_Y \circ f$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] & X \times Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & X \\ & & Y \end{tikzcd}$$

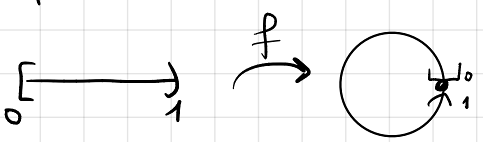
Количничка пресликавања и количнички простори

деф. Пресликавање $f : X \to Y$ је количничко ако је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{T}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X.$$

(Приметимо: смер „$\Rightarrow$" је непрекидност.)

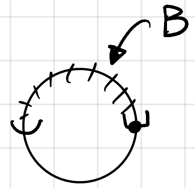
Пример $f : [0,1) \to S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



f је непр. и „на", али не важи услов „$\Leftarrow$" па није количничко

За $B := f([0, \frac{1}{2}))$ имамо:

$$f^{-1}(B) = [0, \tfrac{1}{2}) \in \mathcal{T}_{[0,1)} \not\Rightarrow B \in \mathcal{T}_{S^1}$$



Став Пресликавање $f : X \to Y$ је количничко акко је „на" и

$$(\forall B \subseteq Y) \quad B \in \mathcal{F}_Y \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X.$$

Став Ако је f непр., „на" и отворено/затворено, онда је f количничко.

Нека је X т. пр. и Y скуп и $f: X \to Y$ „на".
На Y дефинишемо финалну топологију помоћу f:

$$\mathcal{T}_Y := \mathcal{T}_f = \{ V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}$$

Став $\mathcal{T}_f$ јесте топологија на Y.

<u>доказ</u> по деф. ☒

Став $f: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_f)$ је количничко.

<u>доказ</u> директно из деф. ☒

Став $\mathcal{T}_f$ је најшира топ. т.д. је f непр.

Количнички простор задајемо на 3 начина.

① Помоћу релације екв.

Нека је X т. пр. и $\sim$ рел. екв. на X. Природна пројекција $\pi: X \to X/_\sim$, $x \mapsto [x]$ нам даје топ. на $X/_\sim$:

$$\mathcal{T}_{X/_\sim} := \mathcal{T}_\pi = \{ V \subseteq X/_\sim \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \}.$$

Пар $(X/_\sim, \mathcal{T}_{X/_\sim})$ је количнички простор.

② Помоћу подскупа.

Нека је X т. пр. и $A \subseteq X$. Дефинишемо рел. $\sim$ на X:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x = y \ \vee \ x, y \in A$$

$\sim$ је рел. екв. па дефинишемо:

$$X/A \overset{\text{def}}{=} X/_\sim \quad \text{и} \quad \mathcal{T}_{X/A} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{T}_{X/_\sim}$$

Пар $(X/A, \mathcal{T}_{X/A})$ је количнички простор.

③ Помоћу пресликавања.

Нека су X, Y топ. и $f: X \to Y$ непр. Дефинишемо $\sim$ на X:

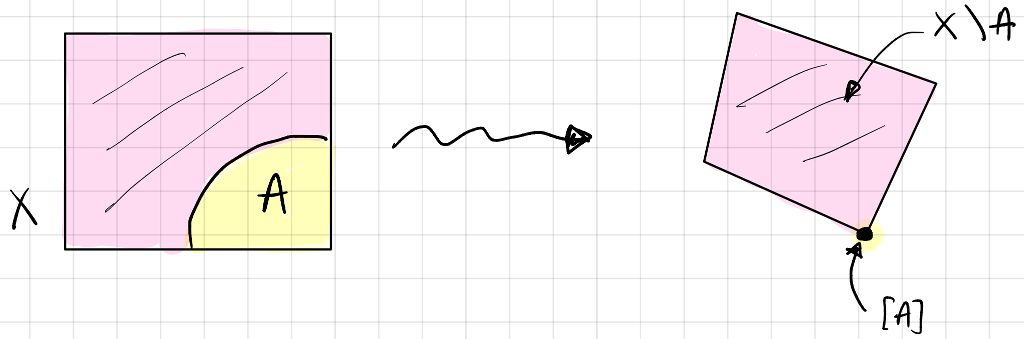
$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

$\sim$ је рел. екв. и

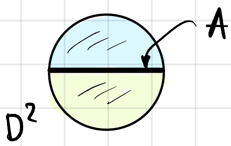
$$X/f \overset{def}{=} X/\sim, \quad \mathcal{T}_{X/f} \overset{def}{=} \mathcal{T}_{X/\sim}.$$

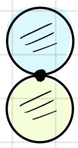
Пар $(X/f, \mathcal{T}_{X/f})$ је количнички простор.

Пример $A \subseteq X$, X/A = „скупимо A у тачку"

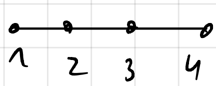


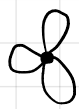
(1) $X/X \approx *$

(2) 

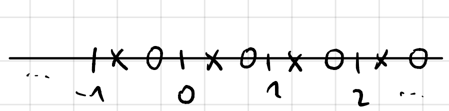
$D^2/A =$ 

(3) $D^n/\partial D^n = S^n, \quad n \in \mathbb{N}$

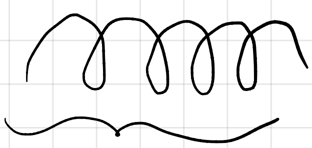
(4) $[1,4]/\{1,2,3,4\} =$ 

$/\{1,2,3,4\} \approx$ 

Пример $\sim$ на $\mathbb{R}$: $x \sim y \overset{def}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}$



$/\sim \;\approx S^1$

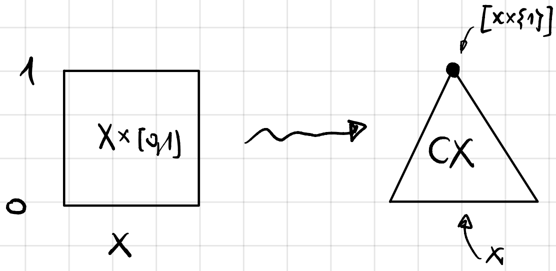
илустрација  $\to$  S^1 („намотамо" $\mathbb{R}$ на S^1)

$\approx \mathbb{R}$

Конструкције нових т.пр.

① Конус простора X

$$CX \overset{\text{def}}{=} X\times[0,1] \big/ X\times\{1\} = X\times[0,1] \big/ \begin{smallmatrix}(x,1)\sim(y,1)\\ (\forall x,y\in X)\end{smallmatrix}$$

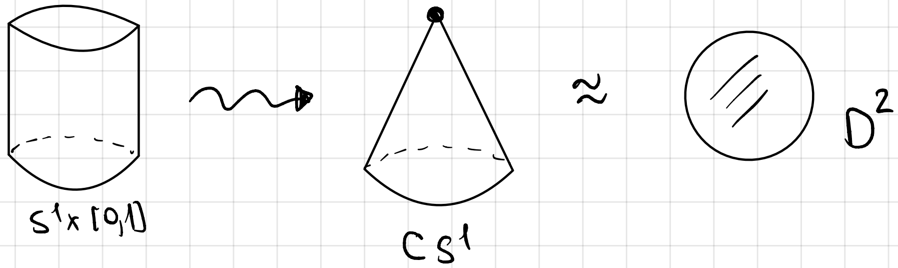


Имамо утапање $i : X \hookrightarrow CX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а може и $i(x) = [(x,t)]$, $t\in[0,1)$)

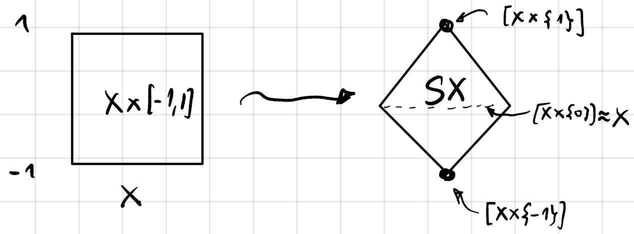
Пример $CS^1 = S^1\times[0,1] \big/ S^1\times\{1\} = D^2$



Генерално: $CS^n = D^{n+1}$.

② Суспензија простора X

$$SX = X\times[-1,1] \big/ \begin{smallmatrix}(x,1)\sim(y,1),\\ (x,-1)\sim(y,-1),\\ (\forall x,y\in X)\end{smallmatrix}$$

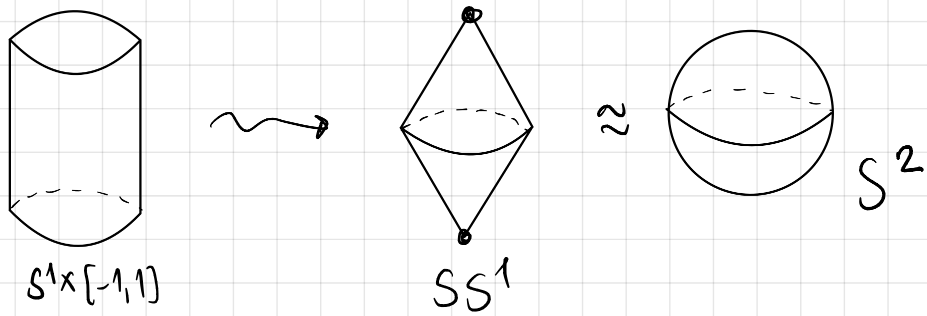


Имамо утапање $i : X \hookrightarrow SX$:

$i(x) = [(x,0)]$

(а може и $i(x) = [(x,t)]$, $t\in(-1,1)$)

Пример $SS^1 = S^1 \times [-1,1]/_{\sim} \approx S^2$



Генерално $SS^n \approx S^{n+1}$

③ Дисјунктна унија X и Y: $(X \sqcup Y, \mathcal{T}_{X \sqcup Y})$

$$\mathcal{T}_{X \sqcup Y} = \{ U \in X \sqcup Y \mid U \cap X \in \mathcal{T}_X,\ U \cap Y \in \mathcal{T}_Y \}$$

④ Простор са базном тачком (X, x_0)

$x_0 \in X$ – произвољна тачка из X

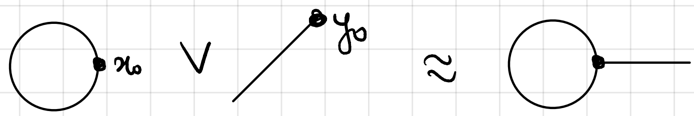
(овде ништа не конструишемо, само уводимо појам базне тачке)

⑤ Букет простора X и Y

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ базне тачке

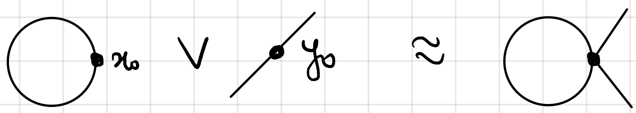
$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) \overset{def}{=} X \sqcup Y /_{x_0 \sim y_0}$$

Пример (1)



$\not\approx$

(2)



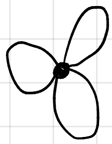
Букет зависи од избора базне тачке!

У неким просторима је свеједно шта је базна т. и тада пишемо само $X \vee Y$. тј.

$$(\forall x_0, x_1 \in X)(\forall y_0, y_1 \in Y)\ (X, x_0) \vee (Y, y_0) \approx (X, x_1) \vee (Y, y_1)$$

$\Rightarrow \quad X \vee Y \overset{def}{=} (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, за $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ произвољно.

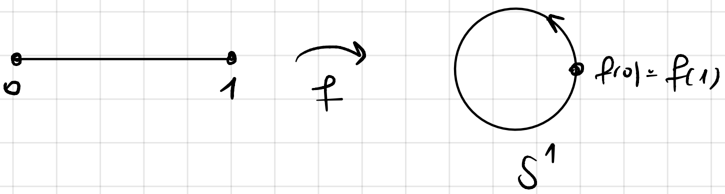
(углавном ће мо се срести баш са овом ситуацијом.)

Пример $\quad [1,4]/\{1,2,3,4\} \approx$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

Примери количничких простора

① Кружница

$f: I \to S^1$, $\qquad f(t) \overset{def}{=} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

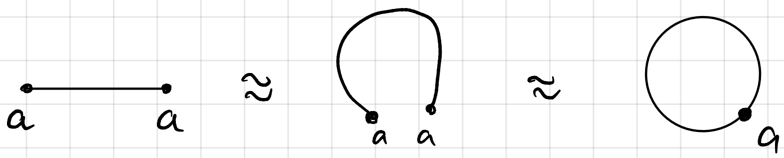


f је непр. и „на", I је компактан, S^1 је T_2 $\Rightarrow$ f је кол.

$\Rightarrow \quad I/_f \approx S^1$. $\quad$ Шта је I/f? За $s, t \in I$:

$$s \sim t \iff f(s) = f(t) \iff (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$$
$$\iff t = s \ \vee \ t, s \in \{0, 1\}$$

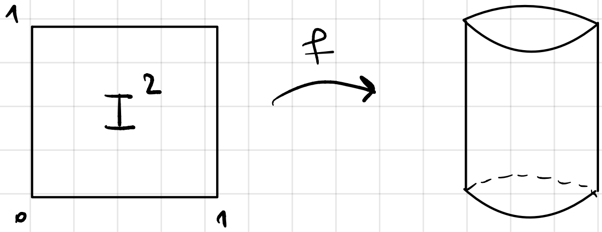
Дакле, I/f је сегмент $[0,1]$ коме су почетак и крај идентификовани.

$I/_f =$  $= S^1$

ова слика значи да „лепимо" a и a

② цилиндар

$$f : I^2 \to S^1 \times I, \quad f(u,v) \overset{\text{def}}{=} (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$$



$S^1 \times I$

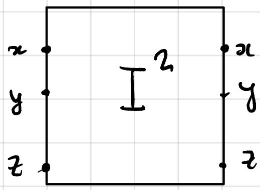
f је количничко (неопр., „на", компакт $\to T_2$)

$\Rightarrow \quad I^2/f \approx S^1 \times I$

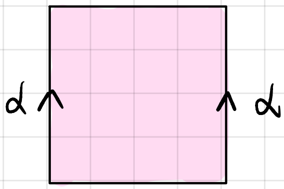
Класе у I^2/f:

$$(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2) \iff \left(u_1 = u_2 \ \vee \ u_1,u_2 \in \{0,1\}\right) \wedge \ v_1 = v_2$$

Дакле, идентификујемо тачке: $(0,v) \sim (1,v)$, $v \in I$

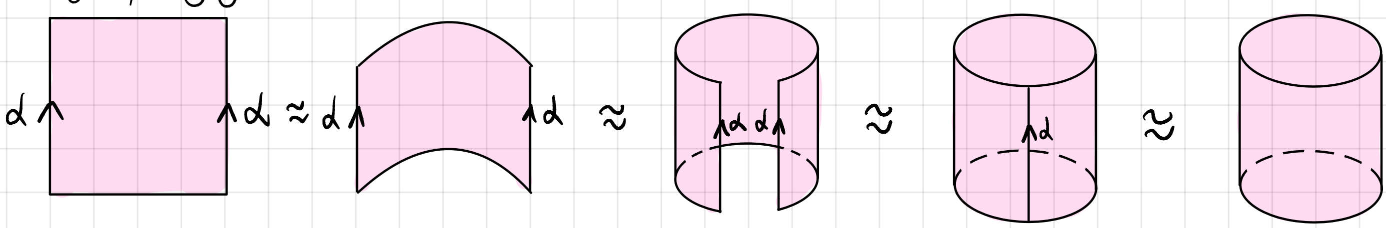


Користимо ознаку:



ово значи да лепимо дужи означене са α у смеру стрелица

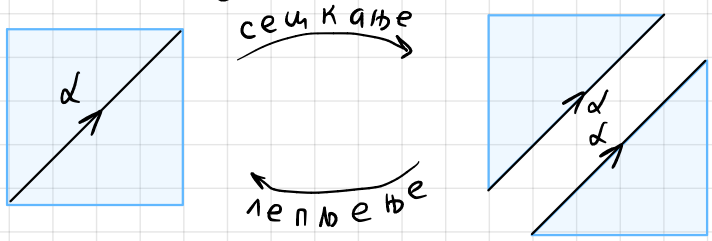
илустрације:



$S^1 \times I$

деф. Количнички простор хомеоморфан неком топ. пр. X је његов количнички модел.

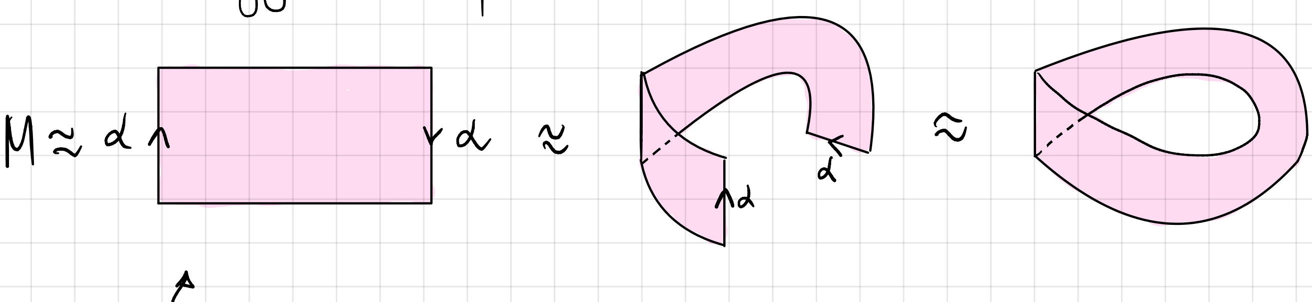
Количнички модели нам служе да простор представимо на лакши начин, нпр. често тродимензионалне објекте можемо представити раванским моделом (као цилиндар у претходном примеру). Имамо две (међусобно инверзне) операције са кол. моделима:



(Обе ове слике представљају квадрат.)

Сецкањем и лепљењем можемо трансформисати моделе (али све време добијамо међусобно хомеоморфне просторе).

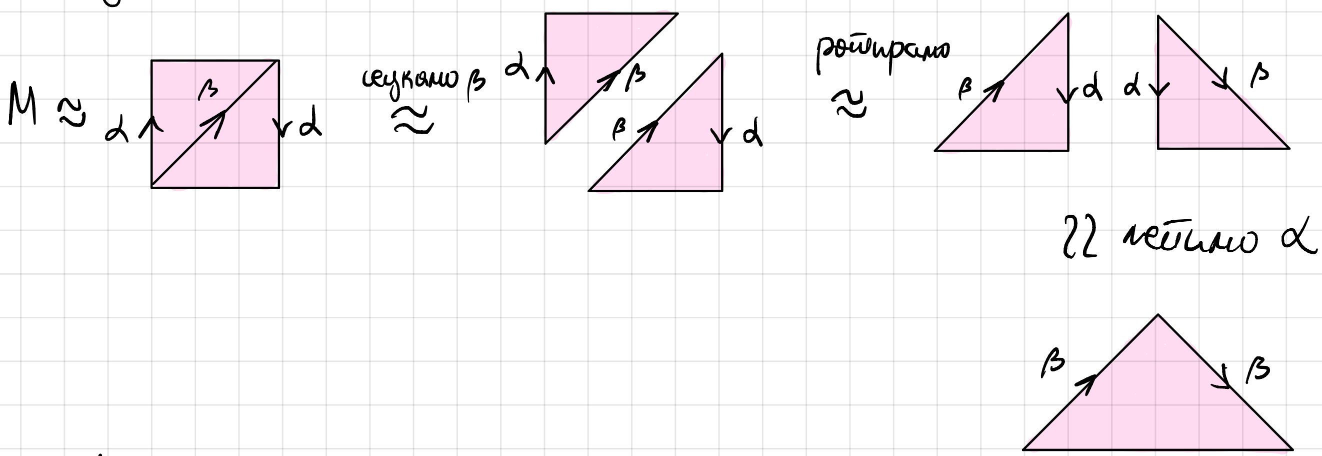
③ Мебијусова трака M



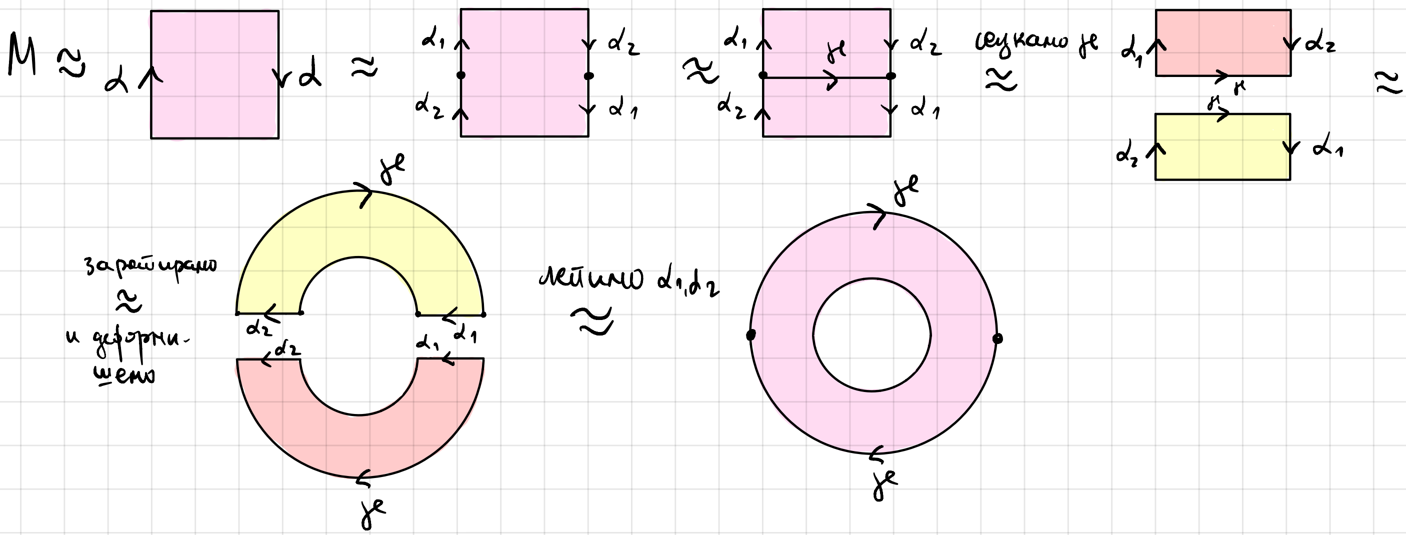
основни модел за M

M има још 2 корисна модела које добијамо сецкањем и лепљењем овог модела

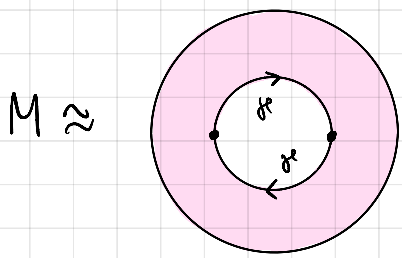
други модел:



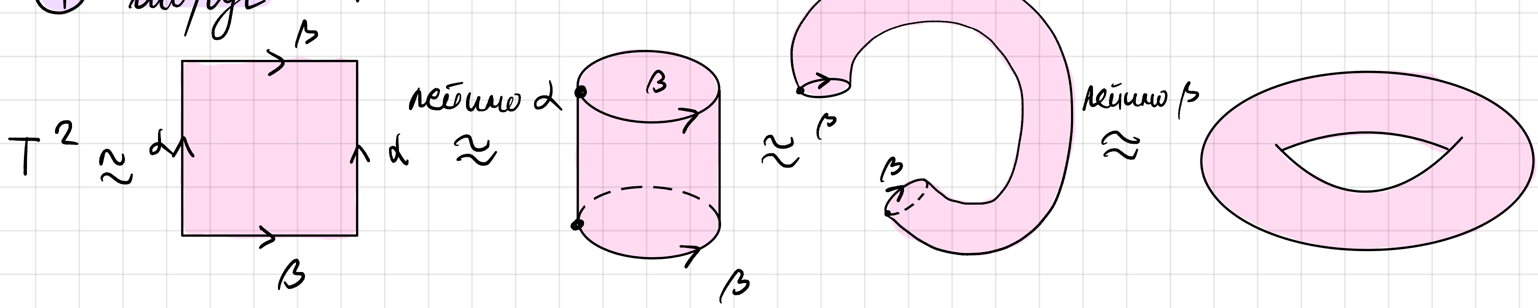
трећи модел:



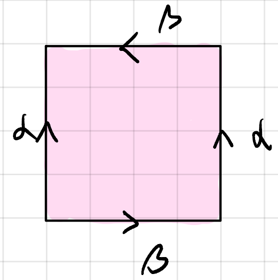
Кружни прстен можемо и „изокренути“, тј.



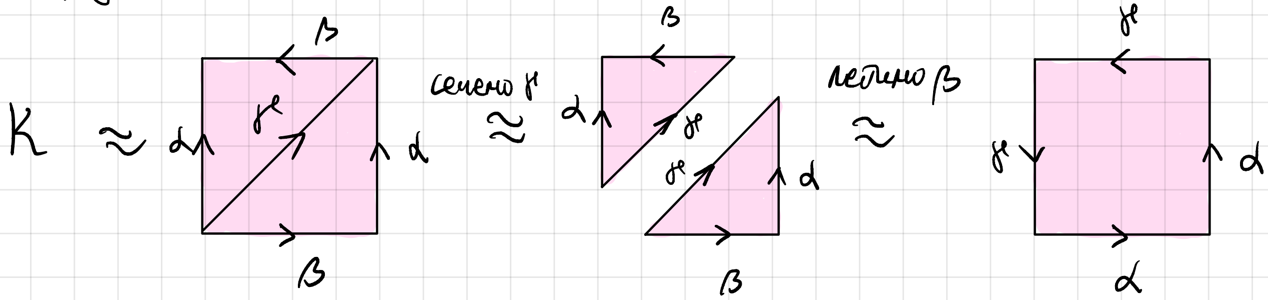
④ торус T^2



⑤ Клајнова боца K

$K \approx$ 

другu модел:



⑥ Реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n$

На $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ дефинишемо релацију:

$$x \sim y \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad y = \lambda x$$

(тј. $x \sim y$ ако припадају истој правој која пролази кроз 0)

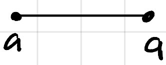
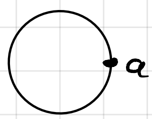
Може се показати да је $\sim$ рел. екв.

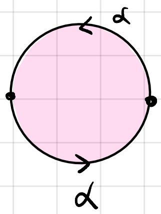
деф. $\mathbb{R}P^n \overset{\text{def}}{=} \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/_{\sim}$

(тј. елементи $\mathbb{R}P^n$ су праве у $\mathbb{R}^{n+1}$ кроз 0)

Став $\mathbb{R}P^n \approx S^n /_{x \sim -x}$

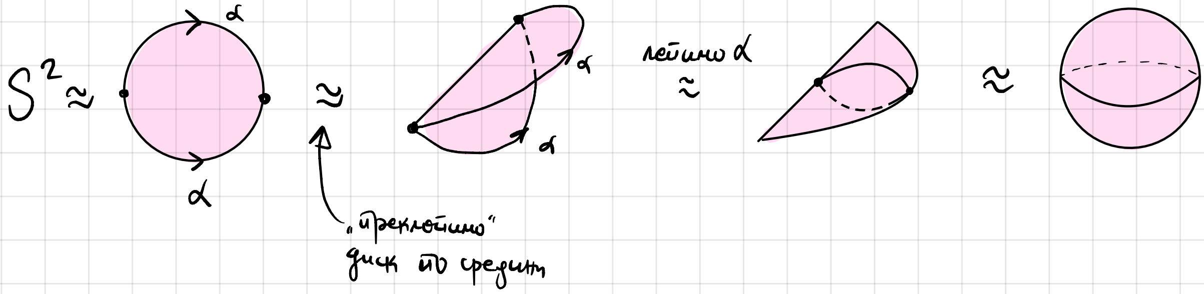
Став $\mathbb{R}P^n \approx D^n /_{x \sim -x,\ x \in \partial D^n}$

$n=1$: $\mathbb{R}P^1 \approx D^1/_{\sim} \approx$  $=$  $= S^1$

$n=2$: $\mathbb{R}P^2 \approx D^2/_{\sim} =$  пројективна раван

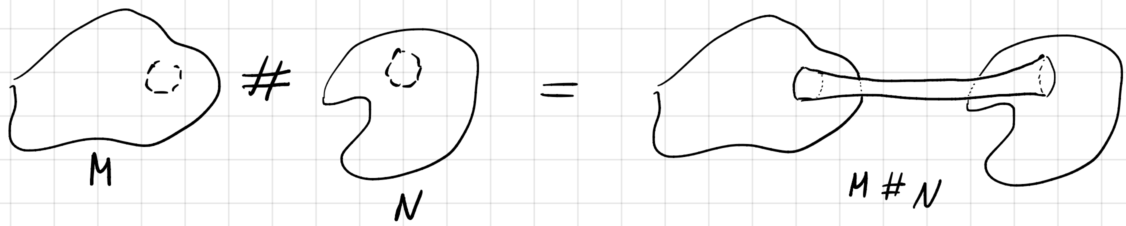
Став $\mathbb{R}P^n$ је компактан, Хаусдорфов, повезан и путно пов.

7) **сфера** S^2



Класификација повезаних затворених површи

Дефинишемо операцију повезане суме (ознака: #) која од 2 површи M и N прави нову површ на следећи начин: са M и N скинемо по отворен диск и залепимо их по хомеоморфизму граничних кружница



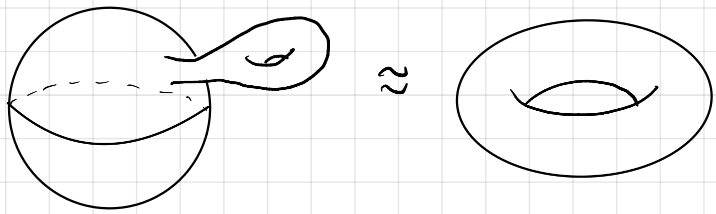
$M_0 := S^2$ - сфера

$M_g \overset{def}{=} M_{g-1} \# T^2$, $g \geq 1$

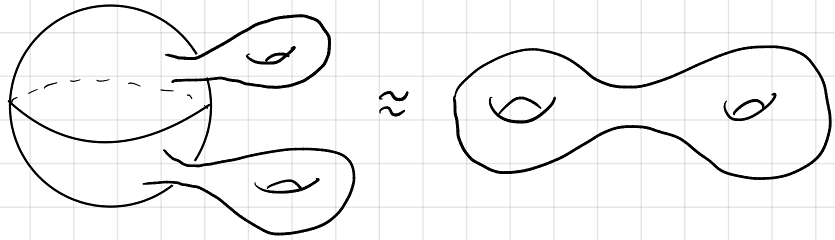
торус

Дакле,

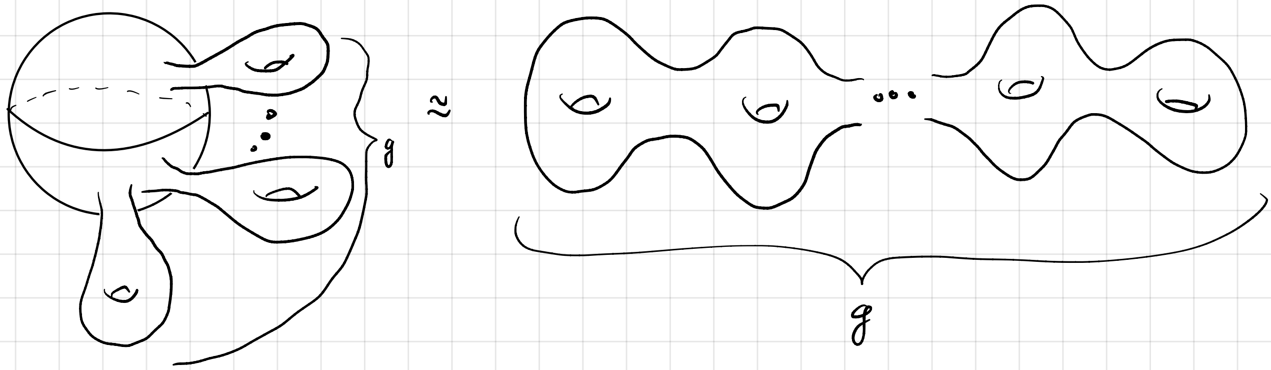
$M_1 =$



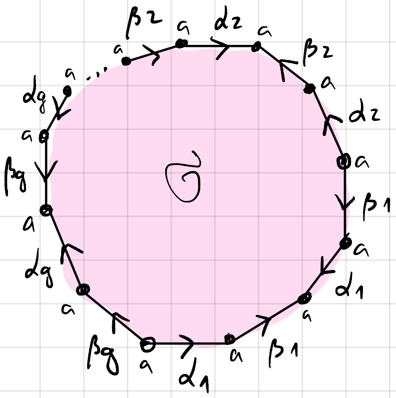
$= T^2$

$M_2 =$ 

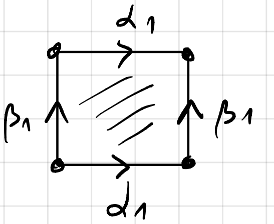
$\vdots$

$M_g =$ 

Количнички модел у равни за M_g:



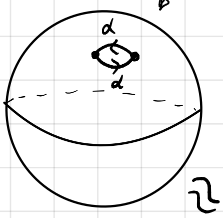
многоугао са $4g$ ивица и $2g$ идентификације

Специјално, $M_1 =$  $= T^2$

$N_1 \overset{def}{=} M_0 \# \mathbb{R}P^2$

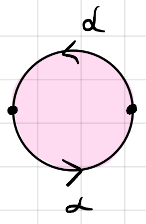
$N_h \overset{def}{=} N_{h-1} \# \mathbb{R}P^2, \quad h \geq 2$

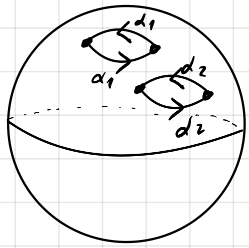
Дакле,

$N_1 =$ 

скинули смо диск са S^2 и на граници имамо идентификацију

између α је „рупа"

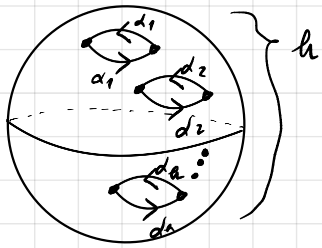
$\approx$  $\approx \mathbb{R}P^2$

$N_2 =$ 

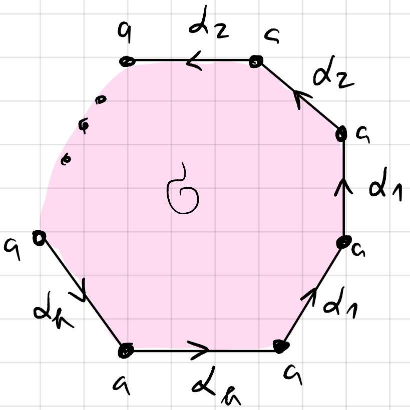
$\approx K$ – Клајнова боца

ово није очигледно

$\vdots$

$N_h =$ 

Количнички модел у равни за N_h:



многоугао са $2h$ ивица и h идентификације

Теорема [о класификацији површи] Нека је X повезана затворена површ (тј. компактна и без границе). Тада

(1) ако је X оријентабилна, онда
$$(\exists g\in\mathbb{N}_0)\ X\approx M_g;$$
(2) ако је X неоријентабилна, онда
$$(\exists h\in\mathbb{N})\ X\approx N_h.$$

Ојлерова карактеристика: $\chi(\underset{\text{површ}}{M}) \overset{\text{def}}{=} \underset{\text{темена}}{t} - \underset{\text{ивице}}{i} + \underset{\text{пљосни}}{p}$

	темена	ивице	пљосни
M_g	a	$\alpha_1,\dots,\alpha_g$, $\beta_1,\dots,\beta_g$	σ
N_h	a	$\alpha_1,\dots,\alpha_h$	σ

$$\chi(M_g) = 1-2g+1 = 2-2g$$
$$\chi(N_h) = 1-h+1 = 2-h$$